



**UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**  
**Faculdade de Ciências e Tecnologia**  
**Departamento de Engenharia Civil**

## **Análise Numérica Não Linear de Ligações Pilares Laje Fungiforme**

Por

**Leide Manuel dos Santos Soares**

Licenciado em Ciências de Engenharia Civil

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil

Orientador: Professora Doutora Ildi Cismasiu

Co-orientador: Professor Doutor António Pinho Ramos

### **Júri**

Presidente: Professora Doutora Maria Teresa G. Santana

Arguente: Professora Doutora Carla Alexandra da Cruz Marchão

Vogais: Professora Doutora Ildi Cismasiu

**Janeiro de 2016**



**FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**



“Copyright” Leide Manuel dos Santos Soares, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado contou com importantes apoios e incentivos, sem os quais não seria possível e aos quais estarei eternamente grato:

À minha orientadora Professora Doutora *Ildi Cismasiu*, pela disponibilidade e auxílio que me prestou, particularmente na resolução dos problemas relacionados com o programa Abaqus assim como a correção científica.

Ao meu coorientador Professor Doutor *António Manuel Pinho Ramos*, quer pela oportunidade como a disponibilidade demonstrada em auxiliar-me sempre que necessário.

Ao Engenheiro *Nuno Mamede*, por facultar dados (alguns no presente trabalho), pela permanente disponibilidade no desenvolvimento desta tese e pelo conhecimento crucial transmitido para a realização desta dissertação.

Ao *Praxisteles Lima*, agradeço a amizade e a disponibilidade demonstrada.

Aos meus amigos e colegas, um muitíssimo obrigado, em especial, para àqueles com quem tive oportunidade de realizar trabalhos, estudar ou discutir assuntos, onde partilhamos vivências e projetos de vida. Que perdure a união do *campus*.

Um muito obrigado a todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil que auxiliaram-me direta ou indiretamente neste percurso.

Ao Sistema McDonalds (Almada Fórum), sobretudo aos colegas/amigos, um muito obrigado por estes anos.

Por último, agradeço aos meus pais, aos meus irmãos, à minha esposa (pelo que és), e ao meu filho (pela alegria que transmites). Embora estes agradecimentos esteja em último, a importância destes é deveras, as mais valiosas. São meus alicerces.

## Nota:

**Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do projecto Uso Racional de Betão de Alta Resistência em Estruturas de Laje Fungiforme Sujeitas a Acções Cíclicas e Sísmicas - EXPL/ECM-EST/1371/2013, financiado por fundos nacionais através da Fundação da Ciência e Tecnologia/MEC (PIDDAC).**



# Resumo

Neste trabalho, é efetuada a análise numérica da ligação pilares laje fungiforme sob efeito do fenómeno punçoamento através de estudo paramétrico.

A análise foi realizada com recurso ao programa comercial Abaqus, que permite modelar o comportamento não linear do betão e simular a fendilhação, na análise de zona de ligação pilares e laje, e o fenómeno de rotura por punçoamento.

Para validar os resultados provenientes da análise paramétrica, procedeu-se à calibração dos modelos com base na análise de treze modelos de lajes fungiformes que foram ensaiadas em laboratório por outros investigadores. Assim, definiu-se as características a considerar no programa para o estudo paramétrico.

No estudo paramétrico foram elaborados 72 modelos numéricos de laje fungiforme com pilar centrado. Os parâmetros estudados neste trabalho foram; a espessura da laje, a secção transversal do pilar, a percentagem de armadura longitudinal, e a classe de resistência do betão. Os modelos numéricos foram levados até à rotura através da aplicação de deslocamento no pilar.

A avaliação da influência dos diferentes parâmetros no estudo paramétrico foi realizada ao nível das cargas de rotura, em que estes foram comparados com as obtidas pelas previsões das normas e recomendações, nomeadamente o Eurocódigo 2 e o *Model Code 2010* e os resultados obtidos por outro investigador. Foi ainda realizada uma comparação ao nível das rotações pelas mesmas normas e recomendações.

## Palavras chave:

Punçoamento

Betão Armado

Lajes Fungiformes

Análise Numérica

Estudo Paramétrico





# Abstract

This work addresses the numerical analysis of the punching behavior of flat slabs through a parametric study.

The analysis was conducted using the Abaqus commercial software, which allows the non-linear analysis of materials including simulation of cracking, essential in the analysis of geometric discontinuity areas in reinforced concrete structures.

The calibration of the numerical model consisted of a total 13 experimental models of flat slabs. This study allowed to define the material and geometric parameters required to obtain a good correlation between the experimental and numerical models.

The parametric study consisted of the variation of 4 parameters, slabs thickness, column size, reinforcement ratio and concrete strength, resulting in a total of 72 numerical models of a quarter of the flat slab on which the pillar is centered. The purpose of this is evaluate influence of these parameters on the displacement and failure load. The failure loads and the rotations of the slab were compared with standards and recommendations including the Eurocode 2 and the Model Code 2010 and with the numerical result obtained by another investigator.

## **Keywords:**

Punching

Reinforced Concrete

Flat Slabs

Numerical Analysis

Parametric study



# Índice de Matérias

Índice de Matérias	ix
Índice de Figuras	xiii
Índice de Tabelas	xvii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações gerais . . . . .	1
1.1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Objectivos . . . . .	2
1.3 Organização da Dissertação . . . . .	2
<b>2 Comportamento das Lajes Fungiformes</b>	<b>5</b>
2.1 Introdução . . . . .	5
2.2 Mecanismo de rotura ao punçoamento . . . . .	6
2.3 Comportamento dos materiais . . . . .	7
2.3.1 Tensão uniaxial do betão . . . . .	7
2.3.2 Tensão biaxial do betão . . . . .	9
2.4 Modelos constitutivos para betão . . . . .	10
2.4.1 Modelo baseado na teoria da plasticidade . . . . .	10
2.4.2 Modelo de dano isotrópico . . . . .	12
2.4.3 Modelos de dano com plasticidade . . . . .	14
2.5 Normas e regulamentos . . . . .	14
2.5.1 Eurocódigo 2 . . . . .	14
2.5.2 <i>Model Code</i> 2010 . . . . .	16
<b>3 Modelação Computacional</b>	<b>19</b>

3.1	Introdução . . . . .	19
3.2	Modelo de dano com plasticidade para o betão . . . . .	20
3.2.1	Curva tensão-extensão uniaxial à tração . . . . .	25
3.2.2	Curva tensão-extensão uniaxial à compressão . . . . .	27
3.2.3	Variáveis de dano $d_c$ e $d_t$ . . . . .	30
3.2.4	Deformação localizada . . . . .	32
3.2.5	Parâmetros a introduzir no modelo <i>CDP</i> . . . . .	33
3.3	Modelo constitutivo para armadura de aço . . . . .	34
3.4	Elementos finitos . . . . .	34
3.5	Método de resolução . . . . .	35
3.6	Interação e carregamento . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Calibração do Modelo Numérico</b>	<b>39</b>
4.1	Modelos experimentais . . . . .	39
4.1.1	Carregamento . . . . .	40
4.1.2	Monitorização dos modelos experimentais . . . . .	43
4.1.3	Caraterização dos materiais . . . . .	44
4.1.3.1	Betão . . . . .	44
4.1.3.2	Aço . . . . .	46
4.2	Modelos numéricos . . . . .	46
4.2.1	Malha de elementos finitos . . . . .	47
4.2.2	Condições de fronteira . . . . .	48
4.2.3	Caraterização dos materiais . . . . .	48
4.2.3.1	Betão . . . . .	48
4.2.3.2	Aço . . . . .	50
4.2.4	Monitorização dos modelos numéricos . . . . .	51
4.3	Análise dos resultados . . . . .	52
4.3.1	Deslocamentos verticais, modelos AR2 e AR9 . . . . .	52
4.3.2	Deslocamentos verticais, modelos DF1, DF4 e ID1 . . . . .	54
4.3.3	Deslocamentos verticais, modelos PG's . . . . .	56
4.3.4	Cargas de rotura . . . . .	58
4.3.5	Modo de rotura . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Análise Paramétrica</b>	<b>65</b>
5.1	Introdução . . . . .	65
5.2	Modelos numéricos . . . . .	66
5.2.1	Materiais . . . . .	67
5.2.2	Pontos de monitorização . . . . .	67
5.3	Análise dos resultados . . . . .	68
5.3.1	Relação força-deslocamento dos modelos numéricos . . . . .	68
5.3.1.1	Resistência do betão à compressão . . . . .	68
5.3.1.2	Percentagem de armadura longitudinal . . . . .	68
5.3.1.3	Secção do pilar . . . . .	70
5.3.1.4	Altura útil . . . . .	70
5.3.2	Cargas de rotura ao punçoamento dos modelos numéricos . . . . .	71

5.3.2.1	Análise da tendência da relação carga de rotura, MEF, EC2 e MC2010 . . . . .	74
5.3.3	Influência da resistência do betão, $f_{cm}$ , na carga de rotura ao punçoamento . . . . .	77
5.3.4	Influência da altura útil da laje ( $d$ ) e da percentagem de armadura longitudinal ( $\rho$ ) na carga de rotura ao punçoamento . . .	79
5.3.5	Comparação dos valores da análise numérica com os valores das normas . . . . .	83
5.3.6	Análise da proposta para alteração da equação do Eurocódigo 2 de resistência ao punçoamento . . . . .	84
5.3.7	Verificação das rotações da laje na zona exterior à rotura . . . .	86
5.4	Observações gerais . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>89</b>
6.1	Principais conclusões . . . . .	89
6.2	Desenvolvimentos futuros . . . . .	91
	<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>



# Índice de Figuras

2.1	Tipo de lajes fungiformes [29]. . . . .	6
2.2	Tipos de fendilhação presente no fenómeno do punçoamento [39]. . . . .	7
2.3	Mecanismo de rotura ao punçoamento [14]. . . . .	7
2.4	Resposta ao carregamento uniaxial à compressão [32]. . . . .	8
2.5	Formação da microfissuração sob o carregamento uniaxial à tração e a progressão da fissuração [32]. . . . .	9
2.6	Ilustração de estado de tensão biaxial [32]. . . . .	9
2.7	(a) Limite elástico e superfície de rotura em 3D [32], (b) Limite elástico, superfície subsequente e de rotura de tensão principal no plano [20]. . . . .	11
2.8	Diferentes critérios de rotura para tensão biaxial, estado plano de tensão [32].	11
2.9	Perímetro de controlo das áreas carregadas [22]. . . . .	14
2.10	Perímetro de controlo das áreas carregadas [12]. . . . .	16
3.1	A superfície de rotura biaxial do modelo CDP [17]. . . . .	22
3.2	Aproximação hiperbólica da função de plastificação de Drucker-Prager de potencial plástico [17]. . . . .	24
3.3	Modelo de comportamento uniaxial à tração [46]. . . . .	26
3.4	Modelo de comportamento uniaxial à compressão [4]. . . . .	28
3.5	Relação tensão-extensão, formulação Krätzig e Červenka (à tracejado) em função da variação da dimensão de elemento finito do betão da laje AR2. .	30
3.6	Comparação das leis de evolução das variáveis de dano. . . . .	32
3.7	Diagrama tensão-deformação do aço, bilinear, adotado nos modelos simulados [37]. . . . .	34
3.8	Família de elemento comumente utilizado [17]. . . . .	35
4.1	Planta dos modelos experimentais: (a) AR2 e AR9, (b) DF1 e DF4, (c) ID1, (d) PG's (PG3 com dobro da dimensão), (e) ND621-1 e (f) P200 (dimensão em mm). Adaptado Mamede [35] . . . . .	41

## Índice de Figuras

---

4.2	Representação em corte dos modelos experimentais: (a) AR2 e AR9 [38], (b) DF1 e DF4 [10], (c) ID1 [8], (d) PG2-b e PG5 [14], (e) PG3 [15] e (f) PG11, PG19 e PG20 [15]. . . . .	42
4.3	Disposição dos defletômetros nas lajes de grupo AR, DF, ID e PG [35]. . .	44
4.4	Modelo da laje . . . . .	47
4.5	Modelo da malha de elementos finitos . . . . .	48
4.6	Estudo para determinação ângulo de dilatação e regularizador visco-plástico	49
4.7	Modelo de armadura . . . . .	51
4.8	Monitorização . . . . .	52
4.9	Relação força-deslocamento ( $d_1$ , $d_2$ , $d_3$ e $d_4$ ) - EXP vs MEF. Laje AR2 ((a) e (b)) e AR9 (c) e d)). . . . .	54
4.10	Relação força-deslocamento ( $d_1$ e $d_2$ ) - EXP vs MEF. Laje DF1 (a), DF4 (b) e ID1 (c) . . . . .	55
4.11	Relação força-deslocamento ( $d_{pg}$ ) - EXP vs MEF. Lajes da família PG . .	57
4.12	Comparação modo de rotura experimental vs numérico. . . . .	61
4.13	Modo de rotura dos modelos AR2, DF4, PG3 e PG19. . . . .	62
4.14	Ilustração da evolução da extensão plástica (PE) no modelo AR2. . . . .	63
4.15	Ilustração da evolução da extensão plástica (PE) no modelo PG3. . . . .	63
4.16	Escalas das Figuras 4.14 e 4.15. (a), (b) e (c) escalas da Figura 4.14; (d), (e), (f) e (g) escalas da Figura 4.15. . . . .	64
5.1	Modelo da laje. Adaptado Guandalini [14] . . . . .	66
5.2	Influência da resistência do betão e percentagem de armadura na resistência ao punçoamento e o seu comportamento. . . . .	69
5.3	Influência da secção do pilar no comportamento ao punçoamento. . . . .	70
5.4	Influência da altura útil no comportamento ao punçoamento. . . . .	71
5.5	Influência dos parâmetros, $f_{cm}$ (a), $\rho$ (b) e $h$ (c) , em relação à previsão do EC2 (esquerda) e MC2010 (direita). Os símbolos $\searrow$ , $\nearrow$ e $\longrightarrow$ indicam as tendências obtidas por Mamede [33]. . . . .	75
5.6	Influência do parâmetro, $b$ (mm), em relação à previsão do EC2 (esquerda) e MC2010 (direita). O símbolo $\searrow$ é a tendência, e a representação $+\searrow$ indica a tendência e a sua transição obtida por Mamede [33]. . . . .	76
5.7	Evolução das cargas de rotura ao punçoamento com a variação da resistência à compressão de , $f_{cm}$ , em que: $h = 200$ mm, $\rho = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0]\%$ . . . .	77
5.8	Evolução das cargas de rotura ao punçoamento com a variação da resistência à compressão de , $f_{cm}$ , em que: $h = [250, 300]$ mm, $\rho = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0]\%$ . . . .	78
5.9	Evolução das cargas de rotura ao punçoamento em função da altura útil, $d$ , com $f_{cm} = [25, 35, 45]$ MPa e $\rho = [0.5, 1.0]\%$ . . . . .	80
5.10	Evolução das cargas de rotura ao punçoamento em função da altura útil, $d$ , com $f_{cm} = [25, 35, 45]$ MPa e $\rho = [1.5, 2.0]\%$ . . . . .	81
5.11	Evolução das cargas de rotura ao punçoamento em função da percentagem da armadura, $\rho$ , com $h = [200, 250]$ mm e $f_{cm} = [25, 35, 45]$ MPa. . . . .	82
5.12	Evolução das cargas de rotura ao punçoamento em função da percentagem da armadura, $\rho$ , com $h = 300$ mm e $f_{cm} = [25, 35, 45]$ MPa. . . . .	83



5.13	Comparação das cargas de rotura da modelação numérica com: (a) EC2 [22] e (b) <i>MC2010</i> . . . . .	84
5.14	Relação carga de rotura: (a) Normalizada com, $G_f/d$ ; e (b) Numérica com a da expressão proposta. . . . .	85
5.15	Rotação da laje; (a) Modelos numéricos e a expressão de Muttoni e (b) Linha de tendência linear entre modelos numéricos e a expressão de <i>Model Code 2010</i> . . . . .	87



# Índice de Tabelas

2.1	Rotação da laje em torno do pilar na zona exterior à rotura. . . . .	17
3.1	Parâmetros necessários no modelo CDP, Abaqus . . . . .	33
3.2	Propriedades do betão necessários para análise no modelo CDP, Abaqus . .	33
3.3	Valores para configuração de passo de cálculo <i>Static General</i> . . . . .	37
4.1	Parâmetro geométrico da laje [34] . . . . .	40
4.2	Expressões para determinação da característica do betão . . . . .	45
4.3	Caraterísticas do betão utilizados nos vários modelos [34]. . . . .	45
4.4	Caraterização da armadura de aço adotados nos modelos [34]. . . . .	46
4.5	Parâmetros do modelo CDP . . . . .	49
4.6	Caraterização do betão utilizado nos vários modelos . . . . .	51
4.7	Deslocamentos verticais dos modelos AR2 e AR9 [33]. . . . .	52
4.8	Deslocamentos verticais dos modelos AR2 e AR9 . . . . .	53
4.9	Deslocamentos verticais dos modelos DF1 e DF2 [33]. . . . .	54
4.10	Deslocamentos verticais dos modelos DF1, DF4 e ID1. . . . .	55
4.11	Deslocamentos verticais dos modelos PG . . . . .	56
4.12	Comparação das cargas experimentais, numéricas e previstas nas normas. .	60
5.1	Caraterísticas dos modelos, em mm. . . . .	66
5.2	Características do betão e áreas da armadura longitudinal. . . . .	67
5.3	Cargas de rotura para $h = [200, 250]$ mm, $b = [200, 400]$ mm. . . . .	72
5.4	Cargas de rotura para $h = [250, 300]$ mm, $b = [200, 400]$ mm. . . . .	73
5.5	Média ( $\mu$ ), desvio padrão ( $\sigma$ ) e coeficiente de variação (COV) da relação dos valores de carga última ao punçoamento dos modelos numéricos com os previstos pelas normas . . . . .	74
5.6	Parâmetros estatísticos do rácio da carga de rotura dos modelos numéricos com os previstos pelo EC2 e formulação proposta por Mamede. . . . .	86



# Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

## Abreviaturas

CDP	<i>Concrete Damged Plasticity</i>
EC2	Eurocódigo 2
MC90	<i>Model Code 1990</i>
MC2010	<i>Model Code 2010</i>
MEF	Método de elementos finitos

## Letras Latinas Maiúsculas

$A_s$	área de armadura longitudinal
$A_{s,min}$	Área de armadura mínima de flexão
$A_{sw}$	Área de perímetro de armadura de punçoamento em torno do pilar
B	Dimensão da laje
$C_{Rd,c}$	Factor de calibração da expressão da tensão resistente ao punçoamento, EC2
$D_0$	Rigidez elástica inicial
$D_0^{el}$	Rigidez elástica
$D^{el}$	Rigidez elástica reduzida
$D_\phi$	Diâmetro dos varões de aço
$E_{cm}$	Módulo de elasticidade inicial do betão
$E_{ci}$	Módulo de Elasticidade secante do betão
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço
$F(\bar{\sigma})$	Função de cedência
G	Função hiperbólica potencial plástica de Drcuke-Prager

## Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

---

$G_{cl}$	Parâmetro que define energia necessária para esmagar uma unidade de área do material
$G_f$	Energia de fractura do betão
$G_{f,M}$	Energia de fractura do betão utilizada por Mamede (Atena 3D)
$S_r$	Espaçamento radial dos perímetros das armaduras de punçoamento
$S$	Tensão deviatórica efetiva
$V_{norm,EC2}$	Valor normalizado da carga de rotura numérica segundo o EC2
$V_{norm,MC2010}$	Valor normalizado da carga de rotura numérica segundo o MC20
$V_{Rd}$	Resistência ao punçoamento, MC2010
$V_{Rd,c}$	Resistência ao punçoamento do betão e armaduras longitudinais, MC2010
$V_{Rd,s}$	Resistência ao punçoamento da armadura específica, MC2010
$V_{Rm,EC2}$	Valor da carga de rotura prevista pela EC2
$V_{Rm,EXP}$	Valor da carga de rotura dos modelos experimentais
$V_{Rm,MEF}$	Valor da carga de rotura dos modelos numéricos
$V_{Rm,MEF}$	Valor da carga de rotura dos modelos numéricos, obtidas por Mamede (com programa Atena 3D)
$V_{Rm,MC2010}$	Valor da carga de rotura prevista pelo MC2010
$V_{Rm,Prop,A}$	Valor da carga resistente ao punçoamento da análise da equação proposta, analisada com os resultados de Abaqus
$V_{Rm,Prop,M}$	Valor da carga resistente ao punçoamento segundo a equação proposta por Mamede

## Letras Latinas Minúsculas

$a_1$	Menor valor da distancia de aplicação de carga ao eixo de simetria
$a_2$	Maior valor da distancia de aplicação de carga ao eixo de simetria
$a_c$	Parâmetro para calibração da variável do dano à compressão
$a_t$	Parâmetro para calibração da variável do dano à tração
$b$	Secção do pilar
$b_c$	Rácio da extensão plástica e a extensão não elástica à compressão
$b_t$	Rácio da extensão plástica e a extensão não elástica à tração

$d$	Altura útil da laje, média da altura útil em ambas as direções
$d_c$	Variável de dano à compressão
$d_{cmax}$	Valor máxima da variável do dano, degradação máxima à compressão
$d_g$	Dimensão máxima dos agregados
$d_t$	Variável de degradação à tração
$d_{tmax}$	Valor máxima da variável do dano, degradação máxima à tração
$f_{b0}$	Resistência à compressão biaxial
$f_{c0}$	Valor limite elástico da tensão à compressão uniaxial, $0.4f_{cm}$
$f_{ccm}$	Tensão média de rotura à compressão do betão em provetes cúbicos
$f_{cm}$	Tensão média de rotura à compressão do betão em provetes cilíndricos
$f_{ctm}$	Tensão média de rotura à tração do betão
$f_y$	Tensão média e rotura do aço
$f_y$	Tensão efetiva da resistência à tração
$f_{ywd,ef}$	Valor de cálculo da tensão efetiva de cedência das armaduras ao punção-mento
$h$	Espessura da laje
$k$	Fator de escala
$k_1$	Coefficiente da contribuição da compressão introduzida pelo pré-esforço na resistência ao punçãoamento
$K_c$	Rácio da segunda invariante da tensão
$k_{\psi_1}$	Parâmetro que depende da rotação da laje em torno do pilar
$l_{eq}$	Dimensão mínima dos elementos finitos
$\bar{p}$	Tensor da tensão efetiva (pressão hidrostática)
$\bar{q}$	Tensor da tensão equivalente de Von Mises
$r_s$	Distância do centro do pilar até ao raio onde o momento flector é nulo
$v_{min}$	Mínima resistência ao punçãoamento
$v_{Rd,c}$	Valor de cálculo da tensão resistente ao punçãoamento sem armaduras específicas

## Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

---

$u$	Perímetro de controlo, EC2
$u_1$	Perímetro de controlo, MC2010
$\omega$	Abertura de fenda
$w_c$	Abertura de fenda quando a tensão efetiva da resistência à tração é nula

### Letras Gregas

$\alpha$	Ângulo entre as armaduras de punçoamento e a laje
$\gamma$	Fator de correção
$\gamma_c$	Coefficiente de segurança do betão
$\delta_{MN}$	Deslocamento na zona de momento nulo
$\epsilon$	Excentricidade da função potencial plástica função potencial plástico
$\epsilon$	Tensor das deformação totais
$\dot{\epsilon}$	Taxa das deformações totais
$\dot{\epsilon}^{pl}$	Taxa das deformações plásticas
$\dot{\epsilon}^{el}$	Taxa das deformações elásticas
$\epsilon^{pl}$	Tensor das deformações plásticas
$\epsilon_c$	Extensão uniaxial à compressão
$\tilde{\epsilon}_c^{in}$	Extensões não elásticas à compressão uniaxial
$\tilde{\epsilon}_c^{pl}$	Extensões plásticas à compressão uniaxial
$\epsilon_{c0}$	Extensão de $0.4f_{cm}$
$\epsilon_{c1}$	Valor da extensão na tensão de rotura à compressão do betão
$\epsilon_{sy}$	Valor da extensão na cedência do aço
$\epsilon_{su}$	Valor da extensão última assumida na modelação de armadura de aço
$\tilde{\epsilon}_t^{in}$	Extensões não elásticas à tração uniaxial
$\tilde{\epsilon}_t^{pl}$	Extensões plásticas à tração uniaxial
$\epsilon_{t1}$	Valor da extensão na tensão de rotura à tração do betão
$\mu$	Parâmetro de viscosidade (CDP)
$\rho$	Percentagem geométrica de armadura longitudinal



## Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

---

$\rho_{lx}$	Percentagem geométrica de armadura longitudinal da laje segundo x
$\rho_{ly}$	Percentagem geométrica de armadura longitudinal da laje segundo y
$\sigma$	Tensor das tensões de Cauchy
$\sigma_{cp}$	Média das tensões de compressão na zona crítica, derivadas do pré-esforço
$\sigma_{sw}$	Tensão que a armadura especifica de punçoamento tem capacidade de mobilizar
$\psi$	Ângulo de dilatação (no modelo CDP)
$\psi_1$	Rotação da laje em torno do pilar na zona exterior à rotura (MC2010)



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações gerais

#### 1.1.1 Introdução

As lajes fungiformes, são elementos estruturais que conferem vantagem de ordem econômica e arquitetônica. Caracterizam-se por serem apoiadas diretamente sobre os pilares, e transmitirem as cargas suportadas a estes, dispensando o uso das vigas no interior dos edifícios. Proporcionam aos espaços versatilidade e planeza ao teto, facilitando a passagem das instalações técnicas sem alteração dos sistemas estruturais. Genericamente, a repetitividade estrutural e as exigências de maiores vãos entre pilares fazem pender a escolha dos projetistas por esta solução [1].

Quanto ao comportamento estrutural, estas lajes devem resistir com segurança a todas as solicitações durante a sua vida útil, contribuindo como elemento de contraventamento em eventuais ocorrências das ações horizontais e sísmicas. O dimensionamento deste elemento estrutural tem como fator importante a resistência ao punçoamento, tendo em conta o sistema de comportamento aos esforços de flexão e de corte, sendo frequentemente o fator condicionante para escolha da espessura da laje a considerar [38].

Este elemento estrutural está sujeito a um fenómeno complexo, o punçoamento. Trata-se de uma das descontinuidades estática mais crítica em estrutura de betão armado, onde se desenvolve um estado tridimensional de tensões extraordinariamente complexo [38]. Tem-se desenvolvido nos últimos anos inúmeros estudos experimentais com propósito de promover o entendimento deste fenómeno. Estes estudos constituem atualmente a base de expressões de dimensionamento encontrado em diversos regulamentos.

A simulação do comportamento das estruturas de betão armado através do método de elementos finitos (MEF) para reconstruir e complementar os ensaios experimentais é cada vez mais atrativa, e torna o MEF numa ferramenta importante para engenharia. Assim, há possibilidade de realização de estudos, em que são analisados de modo particular os parâmetros que influenciam o comportamento das estruturas (como a laje fungiforme sob o fenómeno de punçoamento), dispensando um processo semelhante em

ensaios laboratoriais, apesar da importância destes para comparação e avaliação dos resultados de análise numérica [33].

### 1.2 Objectivos

Com este trabalho pretende-se realizar a análise não linear do elemento estrutural laje fungiforme (sem armadura específica) sujeita ao fenómeno de punçoamento, através da análise paramétrica, com recurso ao programa de elementos finitos, o Abaqus.

Para garantir a validade dos resultados provenientes da análise paramétrica, procede-se à calibração através de ensaios numéricos de diversos modelos experimentais, onde são analisados em termos qualitativo e quantitativo os resultados das cargas de rotura e as relações cargas e deslocamentos verticais.

A análise paramétrica consiste na modelação de laje, onde assume-se a variação de quatro parâmetros, tais como: a classe de resistência do betão; a percentagem da armadura longitudinal; a secção transversal dos pilares; e a espessura da laje, a fim de averiguar as suas influências no comportamento da laje. A verificação da influência dos parâmetros é feita em termos das cargas de rotura e das rotações, comparando estes resultados com as previsões das normas e regulamentos e com os estudos de Mamede [33] e [34].

### 1.3 Organização da Dissertação

Esta dissertação organiza-se em 6 capítulos. Neste primeiro, são apresentados brevemente a introdução, o enquadramento do problema e os objetivos a serem atingidos.

No capítulo 2, apresentam-se uma breve descrição do mecanismo de rotura por punçoamento e os modelos de comportamento dos materiais usados em modelos numéricos. Ainda no final do capítulo, descrevem-se as expressões para o cálculo da resistência ao punçoamento presentes nas normas EC2 [22] e MC2010 [12].

No capítulo seguinte, o terceiro, é descrito o programa Abaqus. Procede-se a apresentação dos modelos de comportamentos do betão disponíveis na biblioteca do programa e tipos de elementos finitos. É discutido o modelo de Dano com Plasticidade (Concrete Damaged Plasticity (CDP)) utilizado nesta dissertação para modelação, descrevendo os diferentes parâmetros definidores do modelo. É apresentado, também, sucintamente, todos os parâmetros materiais necessários à realização da análise numérica de estrutura de betão armado sujeita ao carregamento monotónico com recurso ao modelo CDP.

No capítulo 4, apresentam-se os modelos de lajes fungiformes ensaiadas experimentalmente e que foram sujeitos aos ensaios numéricos com o objetivo de se compararem

os resultados daí provenientes, a nível de cargas e dos deslocamentos. Desta forma, obtém-se a calibração necessária dos modelos numéricos, identificando os valores característicos dos parâmetros, permitindo a uniformização destes entre os diferentes modelos, assegurando, assim, a confiança dos resultados provenientes da análise paramétrica.

No capítulo 5, introduz-se a análise paramétrica, onde se descreve as características dos materiais, a geometria e a instrumentação dos modelos numéricos. Relativamente aos resultados, estes são analisados ao nível das cargas de rotura e das rotações, avaliando a influência da variação dos parâmetros. Estes resultados, ainda são comparados com os determinados pelo Mamede [33] e os previstos pelas expressões para o efeito presente no EC2 [22] e no MC2010 [12].

Por último, no capítulo 6, apresentam-se as conclusões obtidas no desenvolvimento desta dissertação, sugerindo assim, alguns temas para desenvolvimento futuro.



## Capítulo 2

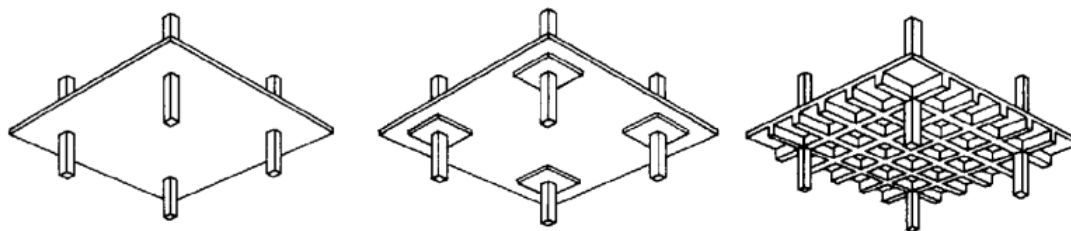
# Comportamento das Lajes Fungiformes

### 2.1 Introdução

As lajes fungiformes são elementos estruturais bidimensionais, maciças ou aligeiradas, em betão armado, apoiadas diretamente sobre os pilares, como ilustrado na Figura 2.1. Foram desenvolvidas, inspiradas nas construções antigas em madeira e ferro, patenteadas em 1882 por francês François Hennebique, apesar do título da sua invenção ser atribuído a Claude A. P. Turner nos EUA, pelo seu artigo publicado no *Engineering News* em 1905, que descreve o projecto de *laje-cogumelo* [7].

Este elemento laminar apresenta um comportamento particular, no que se refere a sua resistência ao punçoamento na ligação laje - pilar, zona sujeita a elevadas tensões originadas pelos esforços de flexão e de corte [38], devido à transmissão de esforços entre um elemento plano, a laje, e um elemento linear, o pilar. A rotura por punçoamento é um mecanismo de colapso local que ocorre geralmente de forma brusca onde há desligamento entre o pilar e a laje. Devido à falta de sinais exteriores visíveis, a sua ocorrência pode ser catastrófica, por causa da contribuição significativa para o colapso da estrutura, pelo incremento da carga em pilares vizinhos. A título de exemplo, tem-se o acidente ocorrido em Seul, Coreia do Sul, num edifício comercial de 5 pisos em 1995 [13], em que centenas de pessoas perderam as suas vidas, devido a este fenómeno.

Existem diversos estudos relacionados a esta temática, e diversos são os investigadores que realizaram ensaios em modelos reduzidos a fim de contribuir para o entendimento deste fenómeno, desenvolvimento de modelos do comportamento das lajes na zona de punçoamento e de métodos de cálculo da carga de rotura por punçoamento. Dos estudos recentes citam-se [8], [9], [14], [15], [16], [31], [38]. Observa-se ao mesmo tempo a existência de consideráveis estudos sobre a modelação numérica dos ensaios experimentais, citando, [21], [33], [35], [37], [40], [46], entre outros.



**Figura 2.1:** Tipo de lajes fungiformes [29].

Nos tópicos que se seguem, apresenta-se uma resenha relativo ao mecanismo de rotura por punçoamento; descreve-se os modelos de comportamento do betão utilizados em modelos numéricos (com particular atenção a modelo usado no presente estudo); apresenta-se as normas e as respetivas expressões usadas para se proceder às comparações com os resultados provenientes da análise numérica.

### 2.2 Mecanismo de rotura ao punçoamento

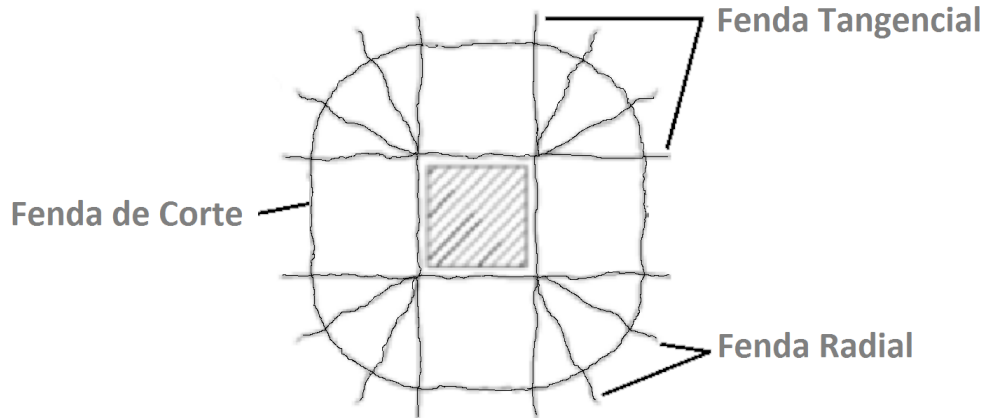
O fenómeno de rotura por punçoamento é uma característica muito própria das lajes fungiformes. Durante a transferência dos esforços de corte e de flexão provenientes da laje a serem descarregados no pilar, geram-se tensões elevadas concentradas no torno do pilar. A concentração das tensões no betão provoca fendilhação, que por sua, conduz a formação de um mecanismo de rotura troncocónico, em que é observado manutenção da ligação laje e pilar através das armaduras longitudinais, conforme se ilustra na Figura 2.3.

Embora, este seja, um fenómeno de rotura local, em determinadas situações podem levar todo o edifício ao colapso, por rotura progressiva. O equilíbrio é garantido através da redistribuição de esforços, onde os esforços inicialmente suportados pelo pilar são repartidos para os pilares vizinhos, originando um aumento dos esforços nestes. Desta forma, a rotura da estrutura passa a depender sucessivamente da capacidade resistência de cada um destes pilares vizinhos.

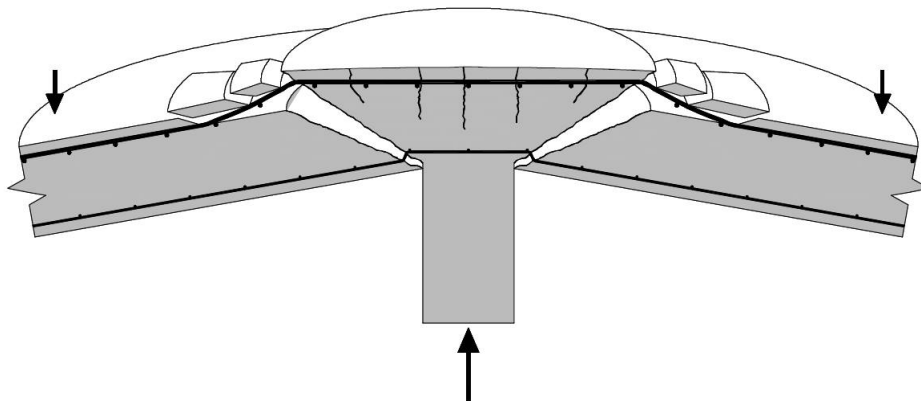
O fenómeno de rotura por punçoamento ocorre de forma repentina, contudo, é possível identificar quatro fases distintas [38], baseado na evolução da fendilhação. Os diferentes tipos de fendas associadas ao fenómeno de punçoamento apresentam-se na Figura 2.2. Inicialmente, os materiais (betão e aço) apresentam um comportamento elástico-linear, por essa razão esta fase é denominada de fase elástico-linear. O fim desta fase é marcado pelo aparecimento das primeiras fendas tangenciais paralelas as faces do pilar e contornam todo o seu perímetro. O seu aparecimento marca o início da segunda fase, denominada fase de resposta à flexão. Nesta fase também surgem as fendas radiais, com origem no pilar podendo alastrar-se à extremidade da laje. As fendas de corte definem o mecanismo de rotura troncocónico intrínseco ao fenómeno de punçoamento. A terceira fase, designada de fase da resistência ao corte, inicia com o aparecimento



destas fendas, com ângulo geralmente inferior ao  $45^\circ$ . A última fase é denominada de fase pós-rotura ao punçoamento, onde a abertura de fenda é evidente, havendo separação total da zona junto ao pilar da restante laje. A este nível de fendilhação, a ligação entre o pilar e a laje é garantida apenas pelas armaduras longitudinais conforme se ilustra na Figura 2.3.



**Figura 2.2:** Tipos de fendilhação presente no fenómeno do punçoamento [39].



**Figura 2.3:** Mecanismo de rotura ao punçoamento [14].

## 2.3 Comportamento dos materiais

### 2.3.1 Tensão uniaxial do betão

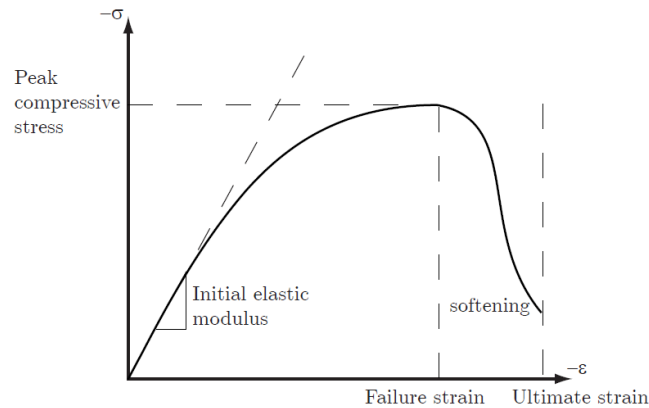
Os ensaios experimentais demonstram um alto comportamento não linear do betão quando este é solicitado por carregamento uniaxial. Um exemplo típico deste comportamento está ilustrado na Figura 2.4.

A curva da relação tensão extensão do diagrama uniaxial à compressão é linear até aproximadamente 30 a 40% da resistência à compressão. Depois, observa-se um aumento gradual da tensão até que seja atingida a resistência máxima à compressão.

## Capítulo 2. Comportamento das Lajes Fungiformes

---

Após o valor do pico, a curva assume uma trajetória descendente. A fase descendente desta curva é denominada por amolecimento do betão. O esmagamento ocorre quando é atingido a extensão última.

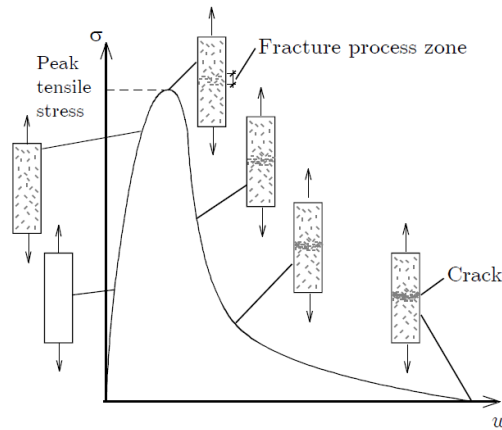


**Figura 2.4:** Resposta ao carregamento uniaxial à compressão [32].

Van Mier [43] e Vonk [44], conduziram investigações em amostras do betão solicitadas axial e multiaxialmente, onde observaram a influência da dimensão dos provetes na resposta ao carregamento. Estes estudos constituem atualmente base para modelos de comportamento do betão para implementação nos modelos numéricos.

A rotura do betão em tração ocorre precedida pelas microfissuras, que aumentam em número e em tamanho. As microfissuras são consideradas deformações localizadas, que formam pela junção as fendas visíveis. Com a perda de capacidade resistente do material, acentua-se a formação de fissuras.

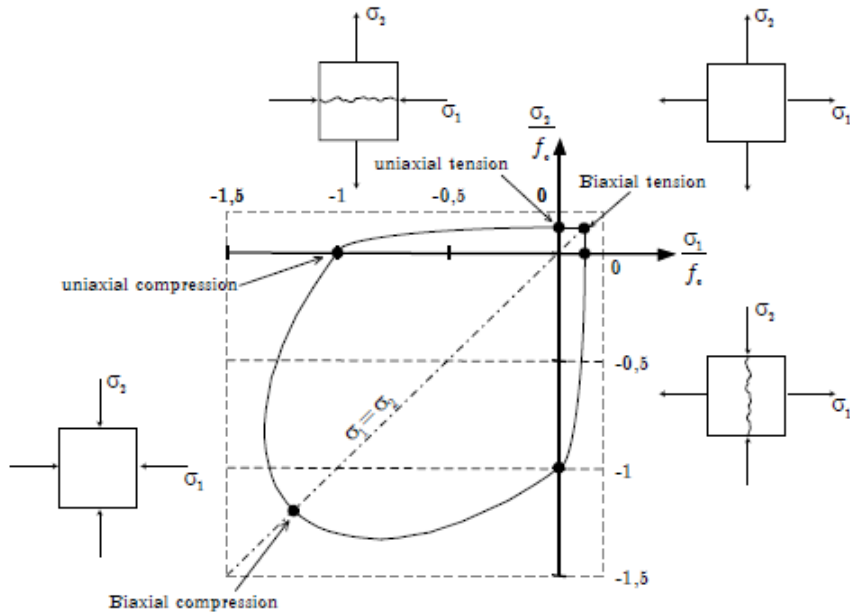
Quando uma amostra do betão é carregada à tração, as tensões aumentam com aumento de abertura de fendas ( $w$ ), até a resistência à tração ser atingida, conforme ilustrado na Figura 2.5. Antes de atingir a tensão de resistência à tração, as microfissuras são pequenas e distribuídas em todo o material. Depois, as tensões diminuem até que a amostra atinja a rotura, separando-se. Esta fase é denominada pela zona de processo de fratura, onde há inicialmente grande consumo de energia por unidade de abertura de fenda.



**Figura 2.5:** Formação da microfissuração sob o carregamento uniaxial à tração e a progressão da fissuração [32].

### 2.3.2 Tensão biaxial do betão

O comportamento do betão sob o estado de tensão biaxial difere do estado uniaxial. Na Figura 2.6 ilustra o diagrama de rotura biaxial assim como a formação de fendas e o correspondente estado de tensão para diferentes quadrantes.



**Figura 2.6:** Ilustração de estado de tensão biaxial [32].

A abertura de fendas apenas ocorre para os estados da tensão do primeiro, segundo e quarto quadrantes do diagrama de rotura biaxial. No segundo e quarto quadrantes do diagrama, a fenda tem orientação perpendicular à tensão de tração, respetivamente,  $\sigma_2$  e  $\sigma_1$ . No primeiro quadrante, a fenda ocorre perpendicularmente à tensão principal de

tração. O estado de compressão biaxial verifica-se no terceiro quadrante, onde há um aumento da resistência à compressão relativamente ao estado de compressão uniaxial.

### 2.4 Modelos constitutivos para betão

Os modelos constitutivos disponíveis para modelar o comportamento não linear do betão podem ser agrupados de acordo com Jirasek [24], em modelos contínuos, discretos e mistos.

Os modelos contínuos descrevem o comportamento não linear usando modelos constitutivos baseados na Mecânica dos Meios Contínuos por uma curva tensão-deformação. Estes modelos são desenvolvidos a partir da teoria da elasticidade, teoria da plasticidade, mecânica de dano contínuo, modelos de dano com plasticidade, modelos de fendas distribuídas.

Os modelos discretos consideram a existência de deslocamentos e rotações finitas de corpos discretos modelados.

Os modelos mistos usam modelos constitutivos diferentes na simulação da zona não fendilhada e na zona com descontinuidades. Exemplos de modelos mistos: mecânica da fratura linear elástica, modelos da fenda fictícia.

#### 2.4.1 Modelo baseado na teoria da plasticidade

Plasticidade é uma ferramenta para descrever o comportamento de um material dúctil. No entanto, muitos problemas que envolvem materiais frágeis têm sido tratados com bastante êxito pela teoria da plasticidade [30]. Para definir um modelo constitutivo baseado na teoria da plasticidade é necessário determinar o critério de cedência, a lei de endurecimento/amolecimento e a lei de fluxo.

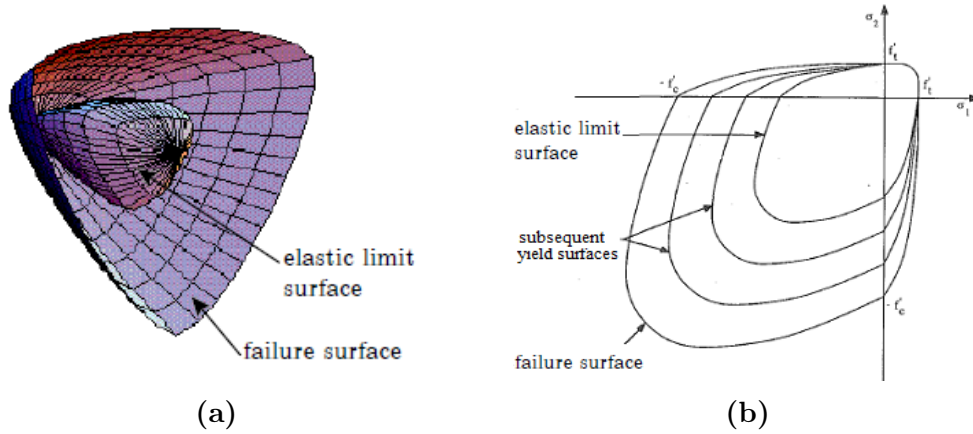
##### Cedência inicial e rotura

As superfícies críticas correspondentes a estes estados material estão ilustradas na Figura 2.7, onde é verificado similaridades entre elas, nos espaços da tensão. O betão exhibe variação significativa de volume quando é submetido a estados não elásticos severos.

O critério de cedência estabelece o limite de capacidade de carga do material em regime elástico, Figuras 2.7a (3D) e 2.7b (plano), a partir do qual são geradas as deformações plásticas. Esta condição define uma superfície no espaço das tensões, a superfície de cedência, em que pontos interiores em regime elástico apresentam variação nula das deformações plásticas. Para que a variação das deformações seja nula, o ponto em causa deve situar-se dentro da superfície de cedência.

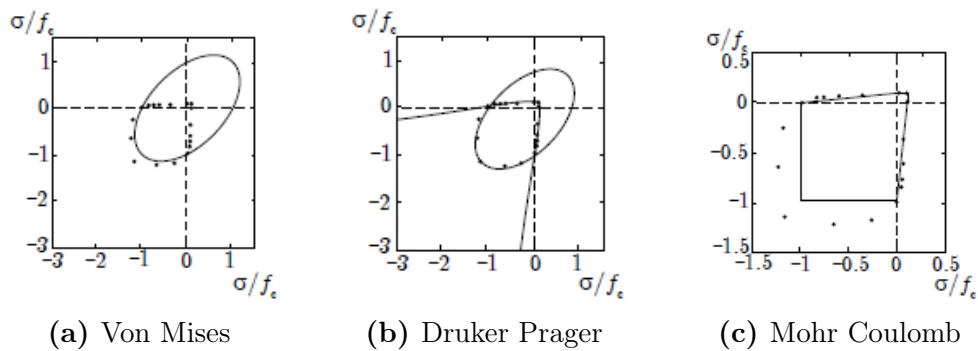
$$F(\bar{\sigma}, \tilde{\epsilon}^{pl}) \leq 0 \quad (2.1)$$

Dada a similaridade entre as superfícies no comportamento biaxial do betão, uma função de cedência é usada nos modelos baseados em plasticidade, dada de forma geral de acordo com a expressão 2.1. Esta função de cedência é inicialmente definida de modo a corresponder ao limite elástico, expandindo para subseqüentes superfícies durante o carregamento até que seja atingida a rotura.



**Figura 2.7:** (a) Limite elástico e superfície de rotura em 3D [32], (b) Limite elástico, superfície subseqüente e de rotura de tensão principal no plano [20].

Existem vários critérios de rotura para o betão, Figura 2.8, sendo os mais frequentes os critérios de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb (Figuras 2.8b e 2.8c, respectivamente).



**Figura 2.8:** Diferentes critérios de rotura para tensão biaxial, estado plano de tensão [32].

### Lei de endurecimento/Amolecimento

O tensor das tensões em modelos baseados na plasticidade é decomposto numa parte elástica e uma parte plástica. A teoria da plasticidade permite descrever

a evolução da extensão através da introdução de uma variável escalar interna,  $k$ , que depende da história do processo de deformação, definida através da expressão 2.2.

$$dk = f(d\bar{\epsilon}^p) \quad (2.2)$$

A lei de endurecimento/amolecimento define a mudança das subseqüentes superfícies de cedência durante o carregamento. A condição de cedência generaliza o conceito de cedência para estados de tensão multiaxiais.

Visto que, a superfície de cedência depende da evolução do carregamento através de  $k$  que só pode expandir ou contrair no espaço da tensão, não sofrendo translação nem rotação, o endurecimento é denominado por endurecimento isotrópico. Endurecimento isotrópico é geralmente considerado como o modelo adequado para problemas em que a deformação plástica vai muito além do estado de cedência inicial, e adequado aos problemas que envolvem carregamento essencialmente monotônico.

### Lei de fluxo

A lei de fluxo permite relacionar os incrementos das deformações plásticas com o campo de tensões e seus incrementos.

O incremento de deformação plástica pode ser determinado através de uma lei de fluxo, como na expressão 2.3. A direção do vetor de incremento de deformação plástica é definida através da existência de uma função de potencial plástico  $G$ .

$$d\epsilon^p = dk \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (2.3)$$

A função potencial plástico quando é coincidente com a função de cedência é denominado pela lei de fluxo associada, e é não-associada no caso contrário.

### 2.4.2 Modelo de dano isotrópico

A teoria da plasticidade assume que a rigidez elástica de um material permanece constante. A existência de dano no material se traduz na alteração das propriedades mecânicas do material, rigidez e capacidade de carga. Nos materiais quase-frágeis, como o betão, submetidos a estados severos de carregamento estas alterações são provocadas devido à presença de micro defeitos e pela propagação das microfissuras que antecede a formação de uma fissura.

A teoria de dano não assume deformações plásticas e a deformação elástica corresponde à deformação total. As alterações nas propriedades mecânicas do material ao nível macroscópico se traduzem numa degradação progressiva da rigidez inicial por meio de

## 2.4. Modelos constitutivos para betão

variáveis internas designadas por variáveis de dano.

O conceito de dano contínuo foi introduzido por Kachanov em 1958, [3]. De entre os modelos de dano contínuo, o modelo de dano isotrópico usa uma variável escalar de dano e tem sido a mais usada na modelação do comportamento do betão.

O modelo de dano contínuo necessita de definição das variáveis de dano, estabelecer a lei constitutiva em função das variáveis de dano e a lei da evolução de dano.

A lei constitutiva em modelos de dano tem a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^s : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

Onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor das tensões e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor das extensões.  $\boldsymbol{D}^s$  é a matriz de elasticidade secante do material danificado, definida pela equação 2.5.

$$\boldsymbol{D}^s = (1 - d_1) \boldsymbol{D}_0 \quad (2.5)$$

A variável de dano  $d_1$  presente na equação 2.5 é independente da direção de carga e traduz o decréscimo de rigidez do material proporcionalmente em todas as direções durante o processo da evolução da deformação. O dano varia desde zero, estado não danificado, para um, perda completa da integridade. A variável  $\boldsymbol{D}_0$  representa a matriz de elasticidade linear do material.

Assim, as tensões são calculadas como:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d_1) \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6)$$

A equação 2.4 pode ser escrita em função das tensões efetivas,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ .

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

Sendo que o tensor de Cauchy é expressa,

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d_1) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.8)$$

Precisa ser estabelecida a lei da evolução do parâmetro de dano,  $d_1$ , do mesmo modo que o endurecimento associada a teoria de plasticidade,

$$d_1 = g(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, k) \quad (2.9)$$

$$\dot{d}_1 = \dot{\nu} \frac{\partial g(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, k)}{\partial(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})} \quad (2.10)$$

A variável  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é a extensão equivalente e  $k$  é uma variável que traduz o critério de dano. Assim, o dano ocorre quando a extensão equivalente  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  ultrapassa o valor de dano limite.

A lei constitutiva 2.4 difere da relação de elasticidade não-linear clássico por depender da história da descarga-recarga,  $f(\boldsymbol{\varepsilon}, k) \leq 0$ , denominado potencial de dissipação, semelhante ao critério de cedência do material na plasticidade. Esta função controla o limite do domínio elástico e a evolução de dano. O dano apenas ocorre quando se atinge o limite do regime elástico  $f(\boldsymbol{\varepsilon}, k) = 0$ .

### 2.4.3 Modelos de dano com plasticidade

O betão danificado apresenta quer deformações permanentes quer redução da rigidez inicial. Para modelar este comportamento recorre-se aos modelos que combinam modelos de plasticidade e de dano [30]. Ao introduzir as deformações plásticas na formulação dos modelos de dano contínuo permite modelar o comportamento irreversível do betão.

A relação tensão-extensão é dada por,

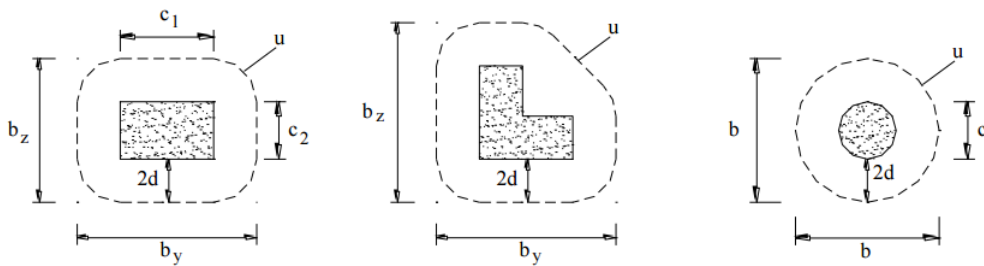
$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d_1) \mathbf{D}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (2.11)$$

## 2.5 Normas e regulamentos

### 2.5.1 Eurocódigo 2

O Eurocódigo 2 (EC2) é recomendação das Normas Europeias, adotadas para Normas Portuguesas, com a designação de NP EN 1992-1 [22], destinada a análise e dimensionamento de estrutura de betão armado.

Esta norma contém expressão para cálculo da resistência ao punçoamento de estruturas, baseada no modelo da FIB Model Code 1990 [5]. Segundo a norma, o dimensionamento é realizado utilizando o perímetro de controlo,  $u$ , que deve ser definido a uma distância duas vezes a altura útil da laje em relação a área carregada, conforme se apresenta na Figura 2.9 . O perímetro de controlo deve apresentar o menor valor, sabendo que o  $d$  representa a altura útil média.



**Figura 2.9:** Perímetro de controlo das áreas carregadas [22].



A expressão 2.12, do EC2 destina-se ao cálculo da resistência ao punçoamento de lajes sem armadura específica.

$$\nu_{Rd,c} = C_{Rd,c} \times k(100 \times \rho_t \times f_{ck})^{1/3} + k_1 \times \sigma_{cp} \geq \nu_{min} + k_1 \times \sigma_{cp} \quad (2.12)$$

Onde,

- $C_{Rd,c}$  é dado por  $\frac{0.18}{\gamma_c}$ ;
- $k$  representa a calibração geométrica das lajes, para ter em conta o efeito de escala,  
 $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$  (d em mm);
- $\rho_t$  parâmetro de ponderação das percentagens de armadura presentes nas duas direcções, para uma largura 3d das faces do pilar,  
 $\rho_t = \sqrt{\rho_{tx} \times \rho_{ty}} \leq 0,02$ ,  
 $\rho_{tx}$  e  $\rho_{ty}$ , referem-se às armaduras de tracção aderentes nas direcções x e y, respectivamente. Estes valores devem ser calculados numa largura b da laje, equivalente à largura do pilar acrescida de 3d para cada lado;
- $f_{ck}$  tensão característica da resistência do betão à compressão, em MPa;
- $k_1$  coeficiente da contribuição da compressão introduzida pelo pré-esforço para resistência ao punçoamento, de valor 0.1 [22];
- $\sigma_{cp}$  média das tensões de compressão na zona crítica, derivadas do pré-esforço;
- $\nu_{min}$  valor mínimo da resistência ao punçoamento,  
 $\nu_{min} = 0,035 \times k^{2/3} \times f_{ck}^{1/2}$ .

As lajes com armadura específica para resistir ao punçoamento, o Eurocódigo 2 apresenta uma expressão distinta para o cálculo da resistência ao punçoamento, definida de acordo com a expressão 2.13.

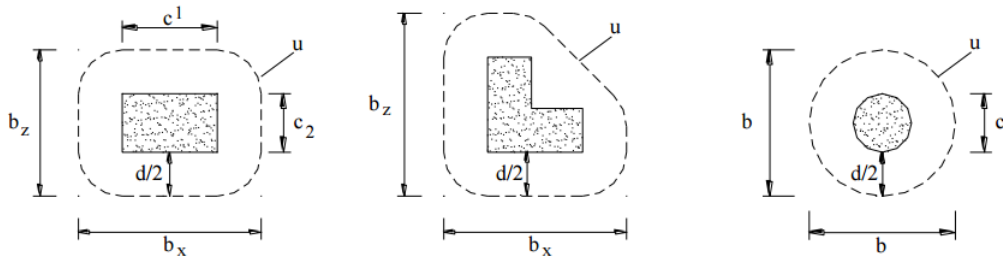
$$\nu_{Rd,cs} = 0,75 \times \nu_{Rd,c} + 1,5 \times \left(\frac{d}{S_r}\right) \times A_{sw} \times f_{ywd,ef} \times \left(\frac{1}{u \times d}\right) \times \sin \alpha \quad (2.13)$$

Em que,

- $\nu_{Rd,c}$  é a resistência ao punçoamento sem armaduras específicas;
- $A_{sw}$  área transversal de armaduras específicas para punçoamento em torno do pilar;
- $f_{ywd,ef}$  valor do cálculo da tensão efetiva de cedência das armaduras específicas, onde:  
 $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d \leq f_{ywd}$ ; (d em mm)
- $\alpha$  ângulo formado entre as armaduras específicas para resistência ao punçoamento e o plano horizontal da laje.

### 2.5.2 Model Code2010

O *Model Code* 2010 [12] é uma atualização do anterior *Model Code* 1990 [5], introduzindo alterações nas recomendações sobre o dimensionamento de estruturas de betão armado. Comparando este com a normalização anterior, este considera o perímetro de controlo ligeiramente inferior, onde  $b_0$  é assumido a uma distancia de metade da altura útil,  $0.5d$ , como ilustrado na Figura 2.10.



**Figura 2.10:** Perímetro de controlo das áreas carregadas [12].

A verificação da capacidade resistente de acordo com a norma, é dada pela expressão 2.14.

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \quad (2.14)$$

A expressão é composta pela contribuição da resistência do betão em conjunto com a armadura longitudinal,  $V_{Rd,c}$ , mais a contribuição da resistência da armadura específicas de punçãoamento,  $V_{Rd,s}$ .

A expressão 2.15a define a contabilização da resistência mobilizada pelo betão e a armadura longitudinal.

$$V_{Rd,c} = k_{\psi_1} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 d \quad (2.15a)$$

$$k_{\psi_1} = \frac{1}{1.5 + 0.6 \cdot \psi_1 \cdot 48 / (16 + d_g)} \leq 0.6 \quad (2.15b)$$

Onde,

$k_{\psi_1}$  é um parâmetro que depende das rotações da laje em torno do pilar;  
 $d_g$  é a dimensão máxima dos agregados.

A contabilização da resistência mobilizada pela armadura específica de punçãoamento é dada de acordo com a expressão 2.16.

$$V_{Rd,s} = \sum A_{sw} K_e \sigma_{sw} \sin \alpha \quad (2.16)$$

Em que,

- $A_{sw}$  é a área de cada armadura de punçoamento em torno do pilar ( $mm^2$ );  
 $K_e$  é um fator de redução do perímetro de controlo, assumindo 0.90 para pilares interiores; 0.7 para pilares de bordo e 0.65 para pilares de canto;  
 $\sigma_{sw}$  é à tensão que a armadura de punçoamento é capaz de mobilizar;  
 $\sigma_{sw} = \frac{E_s \psi_1}{6} \leq f_{ywd}$ .

Na Tabela 2.1 apresentam-se diferentes expressões para o cálculo da rotação ( $\psi_1$ ) da laje na zona exterior à rotura, consoante o nível da aproximação pretendida, sabendo que quanto maior o grau de aproximação, melhor é a previsão prevista nesta norma.

Para o nível de aproximação II é recomendado o valor de  $m_{sd}$  correspondente a  $V_d/8$  para pilares internos. Em pilares de bordo recomenda-se o valor de  $m_{sd}$  correspondente a  $V_d/4$ , caso  $m_{Rd}$  (momento resistente calculado com base na armadura disposta) considerado seja calculado com base na armadura superior paralela ao bordo, ou se for considerada a armadura igual a mínima das armaduras superiores e inferiores na direção perpendicular ao bordo deve-se considerar  $V_d/8$ . Para os pilares de canto, o  $m_{sd}$  considerado é de  $V_d/2$ , com  $m_{Rd}$  determinado de acordo com a mínima das armaduras inferiores e superiores perpendiculares ao canto.

**Tabela 2.1:** Rotação da laje em torno do pilar na zona exterior à rotura.

Grau de aproximação	$\psi_1$
I	$\psi_1 = 1.5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s}$
II	$\psi_1 = 1.5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \left( \frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{1,5}$
III	$\psi_1 = 1.2 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \left( \frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{1,5}$ , com $m_{sd}$ calculado pelo de programa de análise linear, valor médio na faixa do pilar.
IV	Valor calculado com base em programa de análise não linear.

O valor de  $r_s$  é a distância do centro do pilar até ao raio onde o momento fletor é nulo, com o valor aproximadamente  $0.22L_x$  ou  $0.22L_y$  em lajes regulares cuja razão dos vãos é compreendida entre 0.5 e 2.  $E_s$  é o módulo de elasticidade do material das armaduras longitudinais.



## Capítulo 3

# Modelação Computacional

### 3.1 Introdução

Na modelação computacional de estruturas é simulado o comportamento dos materiais constituintes e as suas interações, a fim de obter o comportamento real ou próximo deste. As estruturas que sejam constituídas por betão armado apresentam, geralmente, um comportamento não linear. Esse comportamento não linear verificado no betão, deve-se a um conjunto de fatores como: microfissuração (ainda no processo de cura do betão) e fissuração; a heterogeneidade dos seus constituintes; a aderência com a armadura; e o comportamento reológico do betão, isto é, a variação das respetivas características de deformabilidade com o tempo. Posto isto, os modelos numéricos desenvolvidos para modelação betão armado são constituídos por combinação de formulações que descrevem estes fenómenos.

Uma análise aceitável de qualquer estrutura, usando um programa de cálculo automático por elementos finitos, tem por base a correta definição das propriedades dos materiais utilizados. A nível comercial, existem diversos programas de elementos finitos que disponibilizam modelos para análise do betão e estrutura de betão armado, como por exemplo; Abaqus, Adina, Ansys, Atena 3D e Nastran. Com exceção do programa Atena 3D, desenvolvido para análise de estruturas de betão armado, todos os outros programas são de aplicação geral.

No presente trabalho foi escolhido o Abaqus [17] e [18], por possuir uma biblioteca considerável de modelos não lineares. Nos tópicos seguintes descrevem-se algumas características associadas à modelação no programa nas quais, destacam-se os modelos de comportamento do material (betão) existente na biblioteca Abaqus, assim como as expressões de comportamentos uniaxiais, à compressão e à tração, e da variável de dano a usar. É também apresentado o modelo constitutivo de armadura, a abordagem a considerar para evitar deformação localizada, abortamento precoce da análise, além dos tipos de elementos finitos utilizados na construção dos modelos numéricos.

### 3.2 Modelo de dano com plasticidade para o betão

O programa Abaqus disponibiliza dois modelos de comportamentos de materiais não-lineares para simulação do betão, baseados em abordagens diferentes, um dos quais com base na fissuração distribuída, e outro com base no dano. Os modelos baseados na abordagem de fissuração distribuída são: *Concrete Smeared Cracking* para a análise estática (*Abaqus/Standard*), e *Brittle Cracking* para análise dinâmica (*Abaqus/Explicit*).

Nesta dissertação adotou-se o modelo baseado na abordagem de dano, desenvolvido com base na teoria de plasticidade, implementada no programa sob a denominação de *Concrete Damaged Plasticity* (CDP). O comportamento não linear do betão se baseia no conceito de dano elástico isotrópico.

O modelo CDP implementado no Abaqus foi desenvolvido por Lubliner [30] e inclui as modificações propostas por Lee e Fenves [27]. O comportamento não linear do betão se baseia no conceito de dano elástico isotrópico para representar a degradação da rigidez associada com o dano irreversível que ocorre durante o processo de fractura em combinação com plasticidade isotrópica para descrever os mecanismos de dano, "amolecimento" na tração e esmagamento na compressão. Os modelos de dano locais assumem que o comportamento não linear é controlado por dois mecanismos diferentes, um em tração e outro em compressão.

Para estabelecer as equações constitutivas elasto-plásticas usa-se uma superfície de cedência inicial, a lei de endurecimento e a lei de fluxo não associada [17] e uma função de potencial plástico hiperbólica de Drucker-Prager. O modelo da plasticidade assume uma decomposição aditiva do tensor das deformações totais.

#### Decomposição da deformação total

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (3.1)$$

A deformação total,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , é decomposta por uma parte elástica,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ , e outra plástica,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  também designado de *plastic strain (PE)*.

#### Decomposição da taxa das deformações

A taxa da deformação é dada pela expressão 3.2.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad (3.2)$$

Onde  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  representa a taxa das deformações totais,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}$  a taxa das deformações elásticas e  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$  taxa das deformações plásticas.

#### Conceito de dano no betão

### 3.2. Modelo de dano com plasticidade para o betão

O dano associado ao mecanismo de rotura causa redução da rigidez elástica. A equação constitutiva da relação tensão-extensão considera um modelo de dano escalar assumindo uma redução isotrópica da rigidez elástica, como definida na expressão 3.3.

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d_1) \mathbf{D}_0^{el} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) = \mathbf{D}^{el} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (3.3)$$

Onde,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor das tensões de Cauchy,  $\mathbf{D}_0$  é a rigidez elástica inicial,  $d_1$  é a variável escalar de degradação da rigidez designado de *stiffness degradation variable (SDEG)*,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor das deformação totais e  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  é o tensor das deformações plásticas.  $\mathbf{D}^{el}$  presente na referida expressão é a rigidez elástica reduzida dada pela relação  $\mathbf{D}^{el} = (1 - d_1) \mathbf{D}_0^{el}$ . O tensor das tensões efetivas é obtida pela relação presente na expressão 3.4.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_0^{el} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (3.4)$$

A relação com o tensor de Cauchy é determinada com base nas tensões efetivas e a variável de dano escalar

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d_1) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.5)$$

#### Variáveis de endurecimento

O dano provocado por extensões de tração e compressão são descritos por duas variáveis de amolecimento/endurecimento independentes,  $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$  e  $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$ , que representam extensões plásticas à tração e à compressão, respetivamente.

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_t^{pl} \\ \tilde{\varepsilon}_c^{pl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_t^{in} - \frac{d_t}{(1-d_t)} \frac{\sigma}{E_{cm}} \\ \tilde{\varepsilon}_c^{in} - \frac{d_c}{(1-d_c)} \frac{\sigma}{E_{cm}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Os parâmetros  $\tilde{\varepsilon}_t^{in}$  e  $\tilde{\varepsilon}_c^{in}$  são extensões não elásticas à tração e compressão, e  $d_t$  e  $d_c$  representam a variável escalar de dano respetivamente à tração e à compressão. O  $E_{cm}$  é o módulo de elasticidade secante. As deformações efetivas são obtidas em função da taxa das deformações plásticas.

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl} = h(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad (3.7)$$

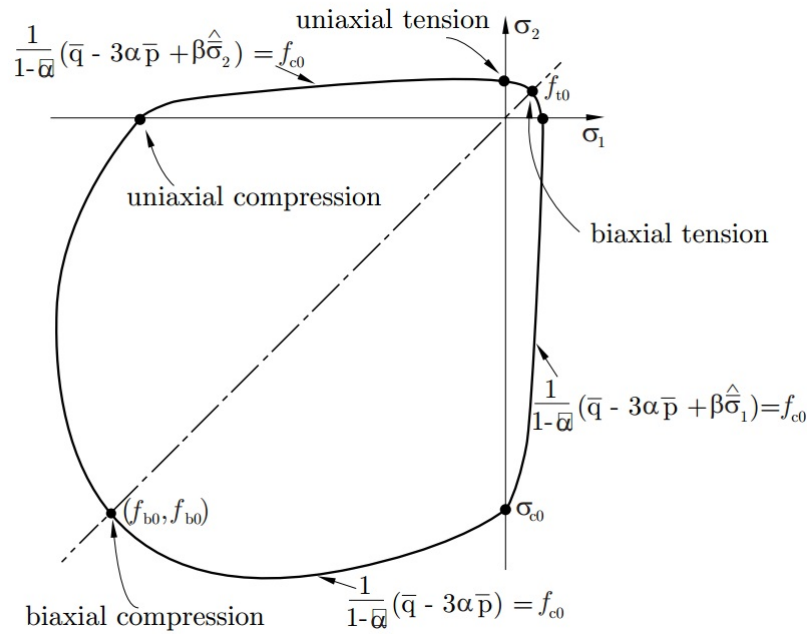
As variáveis de endurecimento controlam a evolução da superfície de cedência, a degradação da rigidez inicial  $\mathbf{D}_0^{el}$  e a dissipação de energia de fratura. Por outro lado, o amolecimento (em tração) e esmagamento (compressão) do betão é representado pelo aumento destas variáveis.

### Função de cedência

A função de cedência,  $F(\bar{\sigma}, \tilde{\varepsilon}^{pl})$ , define os estados de tensão para os quais ocorrem deformações plásticas definidas em termos das tensões efetivas, dada pela equação 3.8.

$$F(\bar{\sigma}, \tilde{\varepsilon}^{pl}) = \frac{1}{1-\alpha} [\bar{q} - 3\alpha\bar{p} + \beta(\tilde{\varepsilon}^{pl})\langle\hat{\sigma}_{max}\rangle - \gamma\langle-\hat{\sigma}_{max}\rangle] - \bar{\sigma}_c(\tilde{\varepsilon}_c^{pl}) \quad (3.8)$$

As variáveis  $\alpha$ ,  $\beta(\tilde{\varepsilon}^{pl})$  e  $\gamma$  são constantes adimensionais determinadas com base nos dados experimentais, pelas relações abaixo descritas. Na Figura 3.1 ilustra a superfície de rotura biaxial.



**Figura 3.1:** A superfície de rotura biaxial do modelo CDP [17].

Onde, os parâmetros presentes na equação 3.8 e na Figura 3.1 representam:

$\alpha$  rácio da resistência à compressão biaxial ( $f_{bo}$ ) e a tensão de limite elástico à compressão ( $f_{c0} = 0.4f_{cm}$ ),  $\frac{f_{bo}}{f_{c0}} = 1.16$  [17],

$$\alpha = \frac{(f_{bo}/f_{c0})-1}{2(f_{bo}/f_{c0})-1}$$

$\bar{p}$  é o tensor da tensão efetiva (pressão hidrostática), que é função da primeira invariante da tensão  $I_1$ ,

$$\bar{p} = -\frac{I_1}{3} = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$$



### 3.2. Modelo de dano com plasticidade para o betão

$\bar{q}$	<p>é o tensor da tensão equivalente de Von Mises,</p> $\bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{3J_2},$ <p>onde <math>J_2</math> é a segunda invariante da tensão deviatórica, <math>J_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_2^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}</math> para carregamento biaxial,</p> <p><math>\mathbf{S}</math> é o tensor da tensão deviatórica efetiva,</p> <p>e <math>\mathbf{S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{p}\mathbf{I}</math>;</p>
$\beta$	<p>é um coeficiente adimensional,</p> $\beta = \frac{\bar{\sigma}_c(\bar{\varepsilon}_c^{pl})}{\bar{\sigma}_t(\bar{\varepsilon}_t^{pl})}(\alpha - 1) - (\alpha + 1);$
$\bar{\sigma}_c(\bar{\varepsilon}_c^{pl})$	é tensão coesiva efetiva à compressão;
$\bar{\sigma}_t(\bar{\varepsilon}_t^{pl})$	é tensão coesiva efetiva à tração;
$\hat{\sigma}_{max}$	<p>é tensão principal efetiva,</p> <p><math>\langle \cdot \rangle</math> é o parêntese de Macauley, e é definido pela relação; <math>\langle x \rangle = \frac{1}{2}( x  + x)</math></p>
$\gamma$	<p>define a forma de carregamento na superfície, <math>F</math>,</p> $\gamma = \frac{3(1-k_c)}{2k_c-1}$ <p><math>k_c</math> é a razão entre a segunda invariante de pressão (<math>J_2</math>) no meridiano à tração (TM) com o de compressão (CM), onde na cedência inicial qualquer valor de invariante da pressão <math>\bar{p}</math> é negativa, respeita o intervalo <math>0.5 &lt; k_c \leq 1.0</math>, com valor padrão de <math>2/3</math>,</p> $k_c = \frac{(\sqrt{J_2})_{TM}}{(\sqrt{J_2})_{CM}}$

#### Lei de fluxo

A função hiperbólica potencial plástica de Drucker-Prager é usada no modelo *Concrete Damaged Plasticity* (CDP) em Abaqus, ilustrada na Figura 3.2 e dada pela expressão 3.9.

$$G = \sqrt{(\epsilon f_{ctm} \tan \psi)^2 + \bar{q}^2} - \bar{p} \tan \psi \quad (3.9)$$

Onde,

- $\epsilon$  é a excentricidade, que define aproximação da função potencial plástica da sua assíntota;
- $\psi$  é o ângulo de dilatação, medido no plano  $p - q$  na alta pressão de confinamento.

O valor da excentricidade recomendado a usar no Abaqus é  $\epsilon = 0.1$  [17], o que implica que o material tem quase o mesmo ângulo de dilatação para diferentes níveis da tensão de confinamento. O aumento do valor de  $\epsilon$  provoca maior curvatura no fluxo potencial, o que implica que o ângulo de dilatação aumenta mais rapidamente à medida que diminui a tensão de confinamento. Por outro lado,

a redução de  $\epsilon$ , pode levar a problemas de convergência se o material é submetido a baixa pressão de confinamento. Relativamente ao ângulo de dilatação,  $\psi$ , para um valor baixo deste ângulo produz-se no material um comportamento do tipo frágil enquanto para valor alto o material apresenta o comportamento dúctil.

Na Figura 3.2 é ilustrada a função hiperbólica de potencial plástico de Drucker-Prager utilizada no programa Abaqus, no modelo *Concrete Damage Plasticity*.

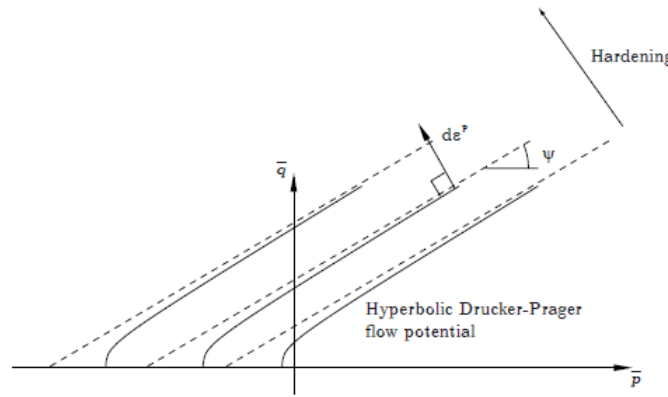
Os parâmetros constituintes desta função presentes na Figura 3.2, representam:

- $\bar{p}$  é a pressão hidrostática, que é uma função da primeira invariante da tensão  $I_1$ ,  

$$\bar{p} = I_1/3 = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$
- $\bar{q}$  é a tensão efetiva equivalente de von Mises,  

$$\bar{q} = \sqrt{3J_2}$$
 onde  $J_2$  é a segunda invariante da tensão deviatórica  

$$3J_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33}$$
 para carregamento biaxial,
- $\psi$  é o ângulo de dilatação, medida no plano  $\bar{p} - \bar{q}$  na alta pressão de confinamento.



**Figura 3.2:** Aproximação hiperbólica da função de plastificação de Drucker-Prager de potencial plástico [17].

#### Parâmetros plásticos do modelo de dano com plasticidade (CDP)

O modelo CDP depende essencialmente de quatro parâmetros,  $k_c$ ,  $\psi$ ,  $\frac{f_{b0}}{f_{c0}}$  e  $\epsilon$ . Além desses parâmetros é necessário definir o comportamento à tração e à compressão que se ajustam às curvas características do betão.

Ao modelar o betão ou a estrutura de betão armado sujeito a um carregamento, é simulado também o seu comportamento durante o processo de amolecimento e esmagamento traduzido pela degradação da sua rigidez. A análise dos modelos nestas fases pode dar origem ao fenómeno de instabilidade durante a modelação

---

### 3.2. Modelo de dano com plasticidade para o betão

numérica, causado pela deformação localizada, e consequentemente à paragem precoce dessa análise.

A deformação localizada deve-se aos estados de rotura atingidos em determinados pontos nos modelos durante análise. Assim, ocorre o comportamento linear e não linear, consequentemente a descontinuidade. Entretanto, o Abaqus disponibiliza método de regularização visco-plástico (de Duvaut-Lions) [18] para ter em conta estes fenómenos. O método, regulariza os estados da tensão em diferentes pontos, evitando que os mesmos atinjam os estados de rotura precocemente. Desta forma, algumas variáveis presentes nas funções constitutivas do modelo CDP alteram, devida a introdução do parâmetro da viscosidade,  $\mu$ . A taxa da deformação anteriormente descrita é substituída pela taxa da deformação do tensor visco-plástico,  $\dot{\varepsilon}_v^{pl}$ , definida conforme a equação 3.10.

$$\dot{\varepsilon}_v^{pl} = \frac{1}{\mu}(\tilde{\varepsilon}^{pl} - \varepsilon_v^{pl}) \quad (3.10)$$

Os parâmetros  $\varepsilon^p$  e  $\varepsilon_v^p$  presentes na expressão 3.10 são, respetivamente, as deformações plásticas nos modelos invíscido e visco-plástico principal. A variável de dano visco-plástico,  $d_v$ , define-se de acordo com a expressão 3.11.

$$\dot{d}_v = \frac{1}{\mu}(d - d_v) \quad (3.11)$$

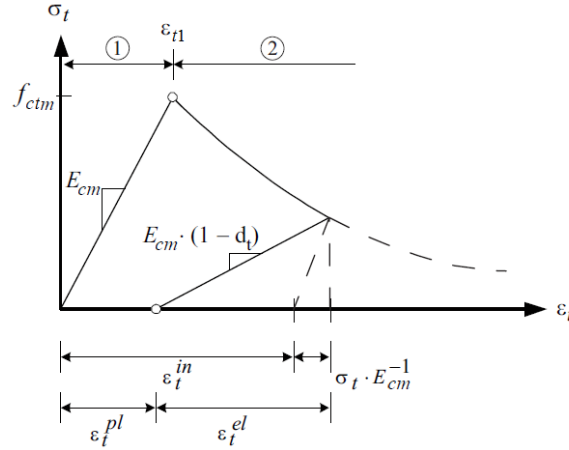
A tensão-deformação do modelo visco-plástico é dada pela expressão 3.12.

$$\sigma = (1 - d_v) \cdot D_0^{el} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_v^p) \quad (3.12)$$

O uso da regularização visco-plástica com um valor pequeno para o parâmetro de viscosidade,  $\mu$ , (pequena em comparação com o tempo de incremento característico) geralmente ajuda a melhorar a taxa de convergência do modelo no regime de amolecimento do material, sem comprometer os resultados [17].

#### 3.2.1 Curva tensão-extensão uniaxial à tração

O betão, quando solicitado à tração, apresenta dois comportamentos distintos, constituído pela fase (1) elástico-linear e a fase (2) de amolecimento, consoante o seu estado de fendilhação, como ilustrado na Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Modelo de comportamento uniaxial à tração [46].

Onde os parâmetros presentes na Figura 3.3 são:

$f_{ctm}$  tensão de resistência à tração;  
 $E_{cm}$  módulo de elasticidade do betão;  
 $\varepsilon_t$  extensão à tração;  
 $\varepsilon_t^{in}$  extensão não-elástica do betão à tração, dado por:

$$\varepsilon_t^{in} = \varepsilon_t - \frac{\sigma_t}{(1-d_t) \cdot E_{cm}}$$

$\varepsilon_t^{pl}$  extensão plástica do betão à tração, dado por:

$$\varepsilon_t^{pl} = \varepsilon_t^{in} - \frac{d_t}{(1+d_t)} \frac{\sigma_t}{E_{cm}}$$

$\varepsilon_t^{el}$  extensão elástica para modulo de elasticidade efetiva, obtida pela aplicação da lei de Hooke,

$$\varepsilon_t^{el} = \frac{\sigma_t}{(1-d_t) \cdot E_{cm}}$$

$d_t$  é parâmetro de dano material,  $0 \leq d_t < 1$ .

No troço (1), a lei constitutiva é dada pela relação

$$\sigma_t^{(1)} = E_{cm} \cdot \varepsilon_t \quad 0 \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{t1} \quad (3.13)$$

Este estado termina quando a tensão atinge tensão de resistência à tração,  $f_{ctm}$ , e a correspondente extensão,  $\varepsilon_{t1}$ . A fase (2) (Figura 3.3), marcada pelo amolecimento do betão, é caracterizada por comportamento não linear. A implementação desta fase no programa Abaqus pode ser realizada de duas formas diferentes, através do critério tensão-extensão ou pela energia de fratura. A análise com base no critério tensão-extensão é suscetível da dependência dos resultados na malha dos elementos finitos adotado, isto é, sensibilidade à malha. A análise de estrutura com baixa percentagem de armadura ou mesmo a sua ausência, a especificação de uma relação tensão-extensão introduz também dependência de resultados na malha, onde as previsões dos elementos

### 3.2. Modelo de dano com plasticidade para o betão

finitos não convergem para uma solução única.

Porém, ao considerar na análise a lei de abertura de fenda exponencial desenvolvida por Hordijk [19] (tensão em função de abertura de fenda,  $\sigma - w$ ), expressão 3.14, permite minimizar estes efeitos.

$$\frac{\sigma_t(w)}{f_{ctm}} = \left[ 1 + \left[ c_1 \cdot \frac{w}{w_c} \right]^3 \right] \cdot e^{(-c_2 \cdot \frac{w}{w_c})} - \frac{w}{w_c} \cdot (1 + c_1^3) \cdot e^{-c_2} \quad (3.14)$$

Em que os parâmetros:

$G_f$	energia de fratura;
$w$	abertura de fenda;
$w_c$	abertura de fenda quando a tensão efetiva da resistência à tração é nula, definida por,
	$w_c = 5.14 \cdot \frac{G_f}{f_{ctm}} [5].$

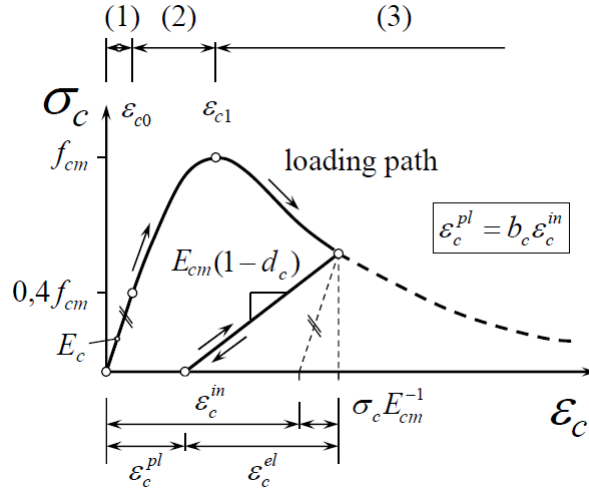
A consideração da dimensão de elemento finito,  $l_{eq}$ , é realizada pela relação apresentada na equação 3.15. Onde a relação tensão-abertura da fenda ( $\sigma - w$ ) obtida pela expressão 3.14 é transformada numa relação tensão-extensão ( $\sigma - \varepsilon_t$ ) através da aplicação da equação 3.15.

$$\varepsilon_t = \frac{f_{ctm}}{E_{cm}} + \frac{w}{l_{eq}} \quad (3.15)$$

Neste estudo, visto que nos modelos numéricos das lajes possuíam elementos finitos com dimensões diferentes, adotou-se a mínima dimensão verificada para a caracterização da propriedade do betão destes modelos.

#### 3.2.2 Curva tensão-extensão uniaxial à compressão

O betão quando é submetido a um carregamento à compressão apresenta um comportamento não linear, com uma curva típica de tensão-extensão constituída por três fases, das quais duas ((1) e (2)) são ascendentes, e correspondem a fase de pré-pico, e a outra fase (3) é descendente, como ilustrado na Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Modelo de comportamento uniaxial à compressão [4].

Os parâmetros presentes na Figura 3.4 representam as seguintes grandezas:

- $f_{cm}$       tensão de resistência à compressão;
- $\varepsilon_c$       extensão à compressão;
- $\varepsilon_{c0}$       extensão à compressão (máxima na fase (1)) correspondente à  $0,4f_{cm}$ ;
- $\varepsilon_{c1}$       extensão à compressão correspondente à  $f_{cm}$ ;
- $\varepsilon_c^{in}$       extensão não-elástica do betão à compressão, dado por,  

$$\varepsilon_c^{in} = \varepsilon_c - \frac{\sigma_c}{E_{cm}}$$
- $b_c$       rácio das extensões plásticas por extensões não elástica,  $b_c = 0.7$  [4];
- $\varepsilon_c^{pl}$       extensão plástica do betão à compressão, dado por,  

$$\varepsilon_c^{pl} = \varepsilon_c^{in} - \frac{d_c}{(1+d_c)} \frac{\sigma_c}{E_{cm}};$$
- $\varepsilon_c^{el}$       extensão elástica para módulo de elasticidade efetiva, obtida pela aplicação da lei de Hooke,  

$$\varepsilon_c^{el} = \frac{\sigma_c}{(1-d_c) \cdot E_{cm}};$$
- $d_c$       é parâmetro de dano material em compressão,  $0 \leq d_c < 1$ .

Nas fases de pré-pico, as funções que as descrevem são iguais ao apresentado pelo *Model Code 90* [5]. Constata-se que a primeira fase (1) é tida como a fase elástica-linear, o comportamento é isotrópico, não havendo lugar para ocorrência das extensões não elásticas. A equação constitutiva é dada pela expressão 3.16 (aplicado no intervalo referenciado na expressão).

$$\sigma_c^{(1)} = E_{cm} \cdot \varepsilon_c \quad 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c0} \quad (3.16)$$

Na segunda fase (2) deste diagrama, a variação da resistência do betão é feita de forma

### 3.2. Modelo de dano com plasticidade para o betão

gradual, e é descrita pela equação 3.17.

$$\sigma_c^{(2)} = \frac{E_{ci} \frac{\varepsilon_c}{f_{cm}} - (\varepsilon_c / \varepsilon_{c1})^2}{1 + \left( E_{ci} \frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \cdot f_{cm} \quad \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c1} \quad (3.17)$$

Sabendo que o parâmetro  $E_{ci}$  presente na expressão 3.17 define-se de acordo com a relação  $E_{ci} = E_0(f_{cm}/f_{cm0})^{1/3}$ , [5].

No ultimo troço, fase (3), pós-pico, a formulação analítica que o descreve é dada pela expressão 3.18, desenvolvida por Krätzig e Pölling [25], a fim ter em conta a dimensão do elemento finito. Assim, reduz-se a dependência de resultados na malha de elementos finitos adotado.

$$\sigma_c^{(3)} = \left( \frac{2 + \gamma_c f_{cm} \varepsilon_{c1}}{2 f_{cm}} - \gamma_c \varepsilon_c + \frac{\gamma_c \varepsilon_c^2}{2 \varepsilon_{c1}} \right)^{-1} \cdot f_{cm} \quad \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_c \quad (3.18)$$

A influência da dimensão do elemento finito na expressão 3.18 é considerado no parâmetro  $\gamma$ , descrita de acordo com a expressão 3.19.

$$\gamma_c = \frac{\pi^2 f_{cm} \varepsilon_c}{2 \left[ \frac{G_{cl}}{l_{eq}} - \frac{1}{2} f_{cm} \left( \varepsilon_c (1 - b_c) + b_c \frac{f_{cm}}{E_{cm}} \right) \right]^2} \quad (3.19)$$

Onde,

$G_{cl}$  parâmetro que define a energia de esmagamento, de designação *crushing energy*, onde  $10 \leq G_{cl} \leq 20$ , Krätzig e Pölling [25]

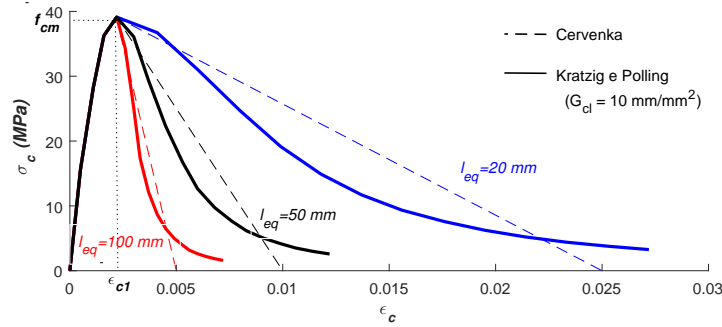
$l_{eq}$  dimensão de elemento finito, onde:

$$l_{eq} \leq \frac{G_{cl}}{f_{cm}(\varepsilon_c(1-b)+b\frac{f_{cm}}{E_{cm}})}$$

A consideração da dimensão do elemento finito por Krätzig e Pölling [25] nesta expressão, teve como base os estudos de Vonk [44] e Van Mier [43], que por sua vez, demonstraram experimentalmente que a dimensão dos provetes nos ensaios à compressão influenciam o comportamento do betão no diagrama uniaxial à compressão na fase(3), pós-pico.

Na Figura 3.5, apresenta o gráfico da curva tensão-extensão à compressão definida de acordo com expressão 3.16, 3.17 e 3.18 de um dos modelos de laje (AR2) estudado, em função da dimensão de elemento finito,  $l_{eq}$ . No gráfico é efetuada uma comparação do diagrama uniaxial à compressão de Krätzig e Pölling [25] com o de Červenka [6], do programa Atena 3D, sabendo que este foi utilizada por Mamede [33] na sua análise. Em relação ao parâmetro  $G_{cl}$ , verifica-se que para o intervalo considerado por

Krätzig e Pölling [25], o valor mínimo, 10 Nmm/mm<sup>2</sup>, apresenta melhor aproximação relativamente ao diagrama de Červenka, sendo por isso adotado neste estudo. A calibração deste parâmetro neste estudo, foi elaborada desta forma, considerando o valor que oferece melhor aproximação entre estes modelos de diagramas uniaxial.



**Figura 3.5:** Relação tensão-extensão, formulação Krätzig e Červenka (à tracejado) em função da variação da dimensão de elemento finito do betão da laje AR2.

#### 3.2.3 Variáveis de dano $d_c$ e $d_t$

Existem diversas expressões para descrever a evolução da variável de dano, observando diferenças significativas, todavia, o intervalo é dado por  $[0, 1]$ , que corresponde à percentagem de degradação no material. O valor nulo de dano, está associado tendencialmente a fase elástica-linear do comportamento do betão, fase (1), Figuras 3.3 e 3.4. Quando este parâmetro assume valor igual à unidade, isto corresponde a uma degradação total do material, porém, não recomendado, visto que danos excessivos pode ter um efeito crítico sobre a taxa de convergência [17]. Recomenda-se o valor máximo de 0.99.

A seguir são apresentadas e descritas quatro expressões de dano. Nestas equações, a notação  $i$  presente em todas elas, tem o significado  $i = c, t$ , em que  $c$  e  $t$  correspondem respetivamente à compressão e à tração. Por outro lado, os índices seguintes estão associados às diferentes grandezas: tensão,  $\sigma$ ; módulo de elasticidade,  $E_{cm}$ ; a extensão não elástica,  $\varepsilon^{in}$ ; e a extensão não elástica máxima,  $\varepsilon_{max}^{in}$ . Desta forma, o índice  $d_i$ , com  $i = c$ , representa dano em compressão,  $d_c$ .

A aplicação das expressões de dano em tração é assumido na fase amolecimento, isto é, fase(2) de acordo com a Figura 3.3.

A aplicação destas expressões da variável de dano não é realiza de modo idêntico em compressão. Desta forma, far-se-á uma descrição relativamente precisa da aplicação destas expressões na compressão. As fases referenciadas a seguir encontram-se na ilustração do diagrama uniaxial à compressão presente na Figura 3.4.

- 1 A formulação expressa pela equação 3.20 foi utilizada por Birtel [4]. A variável de dano tem início na fase (2). A constante  $b_i$  é o rácio da extensão plástica pela



### 3.2. Modelo de dano com plasticidade para o betão

extensão não elástica, com  $b_t = 0.1$  e  $b_c = 0.7$  [4].

$$d_i = -\frac{\sigma_i \cdot E_{cm}^{-1}}{\varepsilon_i^{pl} \cdot (1/b_i - 1) + \sigma_i \cdot E_{cm}^{-1}} \Rightarrow \varepsilon_{j=c0,t1} \leq \varepsilon_i \quad (3.20)$$

- 2 Almansa [2] no seu estudo utilizou a formulação dada pela equação 3.21. O dano atua na fase (2) e fase(3). A constante  $a_i$  é calibrado pela imposição de condições presente nas equações 3.22a e 3.22b. A equação 3.22a, representa a fase elástica, fase(1). A segunda condição, expressão 3.22b, corresponde à degradação total do material e a extensão plástica atinge a sua máxima  $\varepsilon_{imax}^{pl}$ . Apesar de nesta última condição fazer-se referência a  $d_i = 1$ , o mesmo pode ser alterado, como referido anteriormente, para máximo de 0.99 [17].

$$d_i = 1 - e^{-a_i \cdot \varepsilon_i^{in}} \Rightarrow \varepsilon_{j=c0,t1} \leq \varepsilon_i \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_i^{pl} = 0 \Rightarrow d_i = 0 \quad (3.22a)$$

$$\varepsilon_i^{pl} = \varepsilon_{imax}^{pl} \Rightarrow d_i = 1 \quad (3.22b)$$

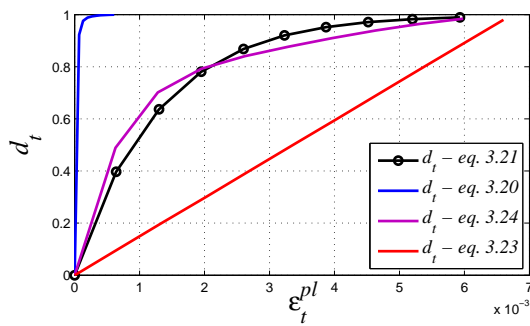
- 3 A formulação descrita pela expressão 3.23, Wahalathantri [45], a variável de dano tem o início após a fase (1), aplicada na fase(2) e fase(3). Nesta expressão a variável de dano é dado em função dos rácios das extensões não elástica,  $\varepsilon_i^{in}$ , pela sua máxima,  $\varepsilon_{imax}^{in}$ , e assume uma variação linear.

$$d_i = \frac{\varepsilon_i^{in}}{\varepsilon_{imax}^{in}} \Rightarrow \varepsilon_{j=c0,t1} \leq \varepsilon_i \quad (3.23)$$

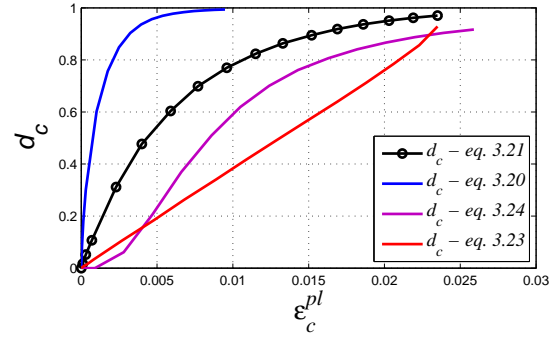
- 4 A expressão 3.24 de Jankowiak [23], a variável de dano tem efeito apenas no troço descendente, fase (3). O parâmetro  $\sigma_a$  assume valor de  $f_{cm}$  ou  $f_{ctm}$  consoante análise à compressão ou à tração, respetivamente.

$$d_i = 1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_a} \Rightarrow \varepsilon_{j=c1,t1} \leq \varepsilon_i \quad (3.24)$$

No presente estudo foi adotada a lei de dano descrita pela equação 3.21, adotado por Almansa [2]. Nas Figuras 3.6a e 3.6b apresentam a comparação das leis de evolução da variável de dano para o caso de tração e compressão uniaxial.



(a) Degradação à tração



(b) Degradação à compressão

Figura 3.6: Comparação das leis de evolução das variáveis de dano.

### 3.2.4 Deformação localizada

Algumas fontes de instabilidade incluem número de interação no modelo, tempo de incrementação, deformação localizada no material. Quando desenvolve deformação local, pode não ser possível obter uma solução estática, *Abaqus/Standard*. Em materiais frágeis, a fenda diagonal devido ao corte tende a iniciar-se rapidamente. A modelação desse fenómeno com uma análise estática no Abaqus, pode em alguns casos, resultar em dificuldades de convergência. Por essa razão, é frequente recorrer à análise quasi-estática pela *Abaqus/Explicit*.

Como foi referido anteriormente, no Abaqus, o modelo CDP inclui nas suas funções constitutivas a regularização visco-plástica, para ter em conta a deformação localizada, através de controlo de estados deformação dos pontos.

Outra forma de superar as dificuldades de convergência quando se utiliza um método estático é a introdução de amortecimento artificial. Isto pode ser feito através da introdução de amortecedores discretos para todos os nós em todas as direcções ou utilizando a função de `automatic stabilization` no passo de cálculo de designação *Static General*. Uma abordagem diferente no *Abaqus / Standard* para evitar interrupção prematura do processo iterativo de equilíbrio é usar o comando `*Controls, Analysis=Discontinuous`, usado quando é esperado uma considerável resposta não-linear, incluindo a possibilidade de regimes instáveis como a fissuração do betão. Assim, é promovido um aumento significativo de iterações antes que o programa inicie a verificação das taxas de convergência. Deste modo, o número de iterações de equilíbrio (sem descontinuidades graves) é aumentado de quatro para oito, depois é feita a verificação se os resíduos estão a aumentar em duas iterações sucessivas. Este comando, também aumenta o número de iterações de equilíbrios consecutivos (sem descontinuidades graves) de oito para dez, em que o controlo da taxa de convergência logarítmica começa [18].

### 3.2.5 Parâmetros a introduzir no modelo *CDP*

A análise numérica com recurso ao programa Abaqus pelo modelo CDP requer a introdução essencialmente de quatro parâmetros, de acordo com a enumeração na Tabela 3.1. O parâmetro  $\mu$  (de viscosidade) é utilizado na situação em que seja expetável consideráveis regimes instáveis e em *Abaqus/Standard*. Na coluna denominada valor, apresentam-se os valores recomendados e assumidos automaticamente pelo programa Abaqus, caso os mesmos não sejam definidos pelos utilizadores.

Nas Tabelas 3.1 e 3.2, apresentam resumidamente todos os parâmetros necessários para caracterização do betão no modelo CDP, para modelação do betão e a estrutura de betão armado sujeita ao carregamento monotónico.

**Tabela 3.1:** Parâmetros necessários no modelo CDP, Abaqus

Parâmetro	Denotação	Valor [17]
$\psi$	1 Ângulo de dilatação	Calibrar
$\epsilon$	2 Excentricidade, que define aproximação da potencial plástica da sua assíntota	0.1
$f_{b0}/f_{c0}$	3 Rácio da resistência biaxial com uniaxial	1.16
$k_c$	4 Racio da segunda invariante da tensão	2/3
$\mu$	Parâmetro de viscosidade ( <i>Abaqus/Standard</i> )	Calibrar

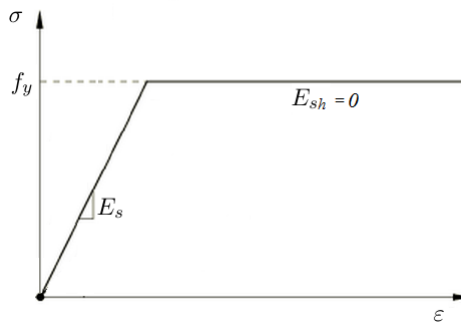
**Tabela 3.2:** Propriedades do betão necessários para análise no modelo CDP, Abaqus

Parâmetro	Denotação
$\rho$	Massa volúmica dos materiais ( <i>Abaqus/Explicit</i> )
$E_{cm}$ e $\nu$	Módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson
$\sigma_i - \epsilon_i^{in}$	Relação tensão com extensão não elástica ( $\epsilon_i^{in}$ ) uniaxial, sabendo que $i = c, t$ caso seja compressão ou tração
$d_i - \epsilon_i^{pl}$	Relação dano material com a extensão plástica ( $\epsilon_i^{pl}$ ), com $i = c, t$ se trata de compressão ou tração, secção 3.2.3

### 3.3 Modelo constitutivo para armadura de aço

A modelação da armadura no programa Abaqus pode ser realizada de duas formas distintas: através de armadura distribuída ou pela armadura discreta. A armadura distribuída é definida numa camada de material (betão), sendo distribuída num plano situado de acordo com a sua altura útil. A armadura discreta é simulada com elementos de barra, introduzidos individualmente com sua característica geométrica e na correspondente altura útil. Este último modelo foi utilizado no desenvolvimento desta dissertação, descrito com mais detalhe na secção 3.4.

No Abaqus é possível definir diferentes leis constitutivas da relação tensão-deformação da armadura. Nesta dissertação adotou-se lei constitutiva bilinear, conforme o ilustrado na Figura 3.7. Os parâmetros  $E_s$  e  $f_y$  representam módulo de elasticidade e tensão de cedência de aço, respetivamente.



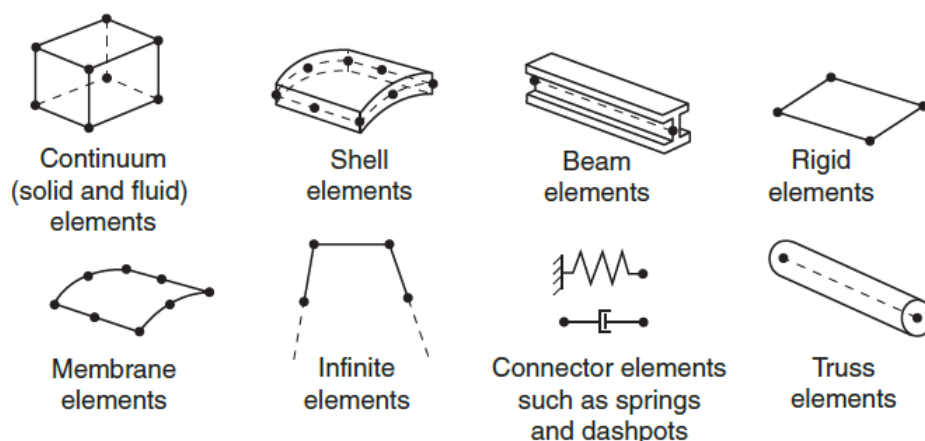
**Figura 3.7:** Diagrama tensão-deformação do aço, bilinear, adotado nos modelos simulados [37].

### 3.4 Elementos finitos

A biblioteca de programa Abaqus contém uma diversidade de elementos finitos para responder adequadamente a diferentes problemas verificadas em engenharia. Estes elementos apresentam cinco características que permitem a sua identificação, assim como modelos de comportamentos esperado. Estas características estão agrupadas em função da família a que os elementos pertencem, pelos: graus de liberdade (diretamente relacionado a família); número de nós; formulação e integração. Cada elemento possui um único nome, tal como, T2D3, S4R, C3D8R. As suas denominações estão associadas às propriedades anteriores citadas.

Na Figura 3.8 apresentam-se as famílias dos elementos que são usados comumente numa análise estrutural.

Dado o problema em causa nesta dissertação, verificou-se que os elementos finitos seguintes apresentam as melhores características:



**Figura 3.8:** Família de elemento comumente utilizado [17].

### C3D8R

Elemento sólido (3D) para simulação do betão com 8 nós, 3 graus de liberdade e integração reduzida;

### T2D3

Elemento barra (2D), para simulação da armadura com 2 nós e três graus de liberdade. Usada para modelação estruturas de transmissão dos esforços axiais.

## 3.5 Método de resolução

Análise de punçoamento em lajes fungiforme com carregamento monotónico pode ser realizada no Abaqus com recurso à análise implícita no *Abaqus/Standard* com método Newton-Raphson, ou pela análise explícita no *Abaqus/Explicit*.

Sabendo que o *Abaqus/Standard* é desenvolvido para análise em condições estáticas, em contrapartida ao *Abaqus/Explicit* desenvolvida para análise em condições dinâmicas, todavia, o problema de laje fungiforme sujeita ao fenómeno de punçoamento (problema estático), pode ser resolvida com recurso ao pacote *Abaqus/Explicit*. A resolução deste problema através do referido pacote pode ser realizada pela transformação do problema num quase-estático, isto é, através de controlo do carregamento. Uma das formas de controlar o carregamento no programa é introduzir, através do comando **amplitude**, no formato tabular a variação da carga em função do período considerado em análise.

A principal diferença entre o sistema implícito e o explícito, está associada à simplificação admitida na equação de movimento (expressão 3.25). No sistema implícito, o deslocamento não é uma função do tempo (isto é,  $\mathbf{X} = \text{constante}$ ), a massa ( $\mathbf{M}$ ) e

amortecimento ( $C$ ) podem ser desprezados, ao passo que no sistema explícito o deslocamento é uma função do tempo, a massa e o amortecimento são considerados.

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \quad (3.25)$$

Para a resolução numérica do problema não linear considerando a análise implícita o Abaqus oferece duas opções, o processo *Riks* e *Static General*. No caso de análise explícita, pode-se recorrer à *Dynamic Explicit*. Foram analisados alguns modelos experimentais com estes processos de cálculos. Dessas análises, obteve-se boas aproximações relativamente aos resultados experimentais dos deslocamentos e dos efeitos da excentricidade gerada pela diferença de altura útil das armaduras (com processo de cálculo *Riks* e o *Dynamic Explicit*). Contudo, no que se refere às cargas de rotura não se obteve os resultados desejados. Sendo assim, os resultados discutidos nos capítulos adiante são obtidos pela aplicação do *step Static General*.

#### Definição dos parâmetros do método *Static General*

Sendo o *Static General* o método numérico adotado em análises nesta dissertação, apresenta-se a Tabela 3.3, os valores considerados para diferentes parâmetros na configuração do mesmo.

O parâmetro *Time period* é o período da análise. Se essa entrada não for especificada, o valor padrão igual a 1.0 é assumido. O *Initial* é o incremento inicial, e corresponde à percentagem da carga aplicada na primeira iteração. O parâmetro *Minimum* é o incremento mínimo, utilizado apenas para incrementação automática. Se durante a análise for necessário um incremento menor do que esse valor, a análise é terminada. Se esta entrada for igual a zero, um valor padrão menor do que o incremento de inicial introduzido ou  $10^{-5}$  vezes o parâmetro *Time period* é assumido. Durante uma análise em regimes instáveis, os incrementos são reduzidos sucessivamente até atingir o mínimo estipulado, para que a verificação dos critérios da convergência sejam satisfeitas. O *Maximum* é o incremento máximo permitido. Apenas utilizado para incrementação automática. Se este valor não for especificado, nenhum limite superior é imposto. O *Increment* é a quantidade máxima de incrementos permitido. Se durante a análise for necessário número de incremento superior do que o especificado, a análise é terminada.

**Tabela 3.3:** Valores para configuração de passo de cálculo *Static General*

Time period	Initial	Minimum	Maximum	Increment
1	0.01	1E-09	1	3000

## 3.6 Interação e carregamento

Para garantir o funcionamento conjunto das armaduras modeladas com elementos de viga e da laje de betão considerou-se a ligação perfeita entre elas, utilizando uma interação do tipo **embedded element**. Este tipo de interação considera a armadura como um elemento imerso na laje e garante a compatibilidade de deslocamentos entre as duas.

O contato entre a laje e os aparelhos metálicos foram consideradas regras de interação de contato pela aplicação de comando **surface-to-surface**, tendo elemento betão como *slave element* (menor rigidez) e os aparelhos metálicos (descrito no capítulo a seguir) como *master element* (maior rigidez).

O carregamento foi realizado pela aplicação dos deslocamentos verticais da mesma forma como foram aplicados experimentalmente, conforme a descrição do capítulo que se segue. O processo de cálculo foi descrito na secção anterior, e a Tabela 3.3 apresenta valores considerados para diferentes parâmetros.





## Capítulo 4

# Calibração do Modelo Numérico

O processo de calibração neste estudo consistiu na uniformização dos parâmetros dos modelos numéricos iniciais através de processo iterativo. Neste capítulo realiza-se a comparação entre os resultados dos modelos experimentais de ensaios ao punçoamento das lajes fungiformes realizados por outros investigadores com os respetivos resultados da análise numérica elaborada neste estudo.

Para esta dissertação, foram considerados treze modelos experimentais de lajes fungiformes sem armadura específica de punçoamento. Dos treze ensaios, cinco foram realizados nas universidades portuguesas: um ensaio realizado por Duarte [8], dois por Faria [11] e os outros por Ramos [38]. Restantes ensaios foram realizados no estrangeiro, sendo três dos quais por Guandalini [14] e também três por Guidotti [15], ambos em Suíça. Outros dois, um foi executado em Canada por Li [28] e outro em Noruega por Tomaszewick [42].

### 4.1 Modelos experimentais

Os modelos experimentais são lajes fungiformes maciças em betão armado e pretendem apenas simular a zona junto ao pilar, sendo limitadas pela zona de momento fletor nulo.

As lajes referentes a Ramos [38] são designadas por AR2 e AR9, os modelos DF1 e DF4 fazem parte do estudo desenvolvido por Faria [11] e ID1 foi desenvolvido pelo Duarte [8]. As lajes PG11, PG19 e PG20 foram estudados por Guidotti [15], enquanto que os modelos PG2-b, PG5 e PG3 foram ensaiados por Guandalini [14]. Por fim, os modelos ND66-1-1 e P200 foram desenvolvidos pelo Tomaszewick [42] e Li [28], respetivamente.

Como ilustrado na Figura 4.1, todas as lajes são constituídas por painéis quadrangulares, onde observa-se a localização e disposição de placas metálicas onde as cargas são aplicadas, assim como a localização de pilar (no centro).

Na Tabela 4.1, são apresentados os dados relativos aos parâmetros geométricos referentes aos modelos experimentais e suas armaduras. Os diferentes índices representam:  $B$ , o comprimento da laje;  $h$ , a espessura; e o  $d$ , a altura útil média. Os valores da secção e a disposição das armaduras em planta estão apresentados na coluna referente ao espaçamento da armadura, inferior e superior.

**Tabela 4.1:** Parâmetro geométrico da laje [34]

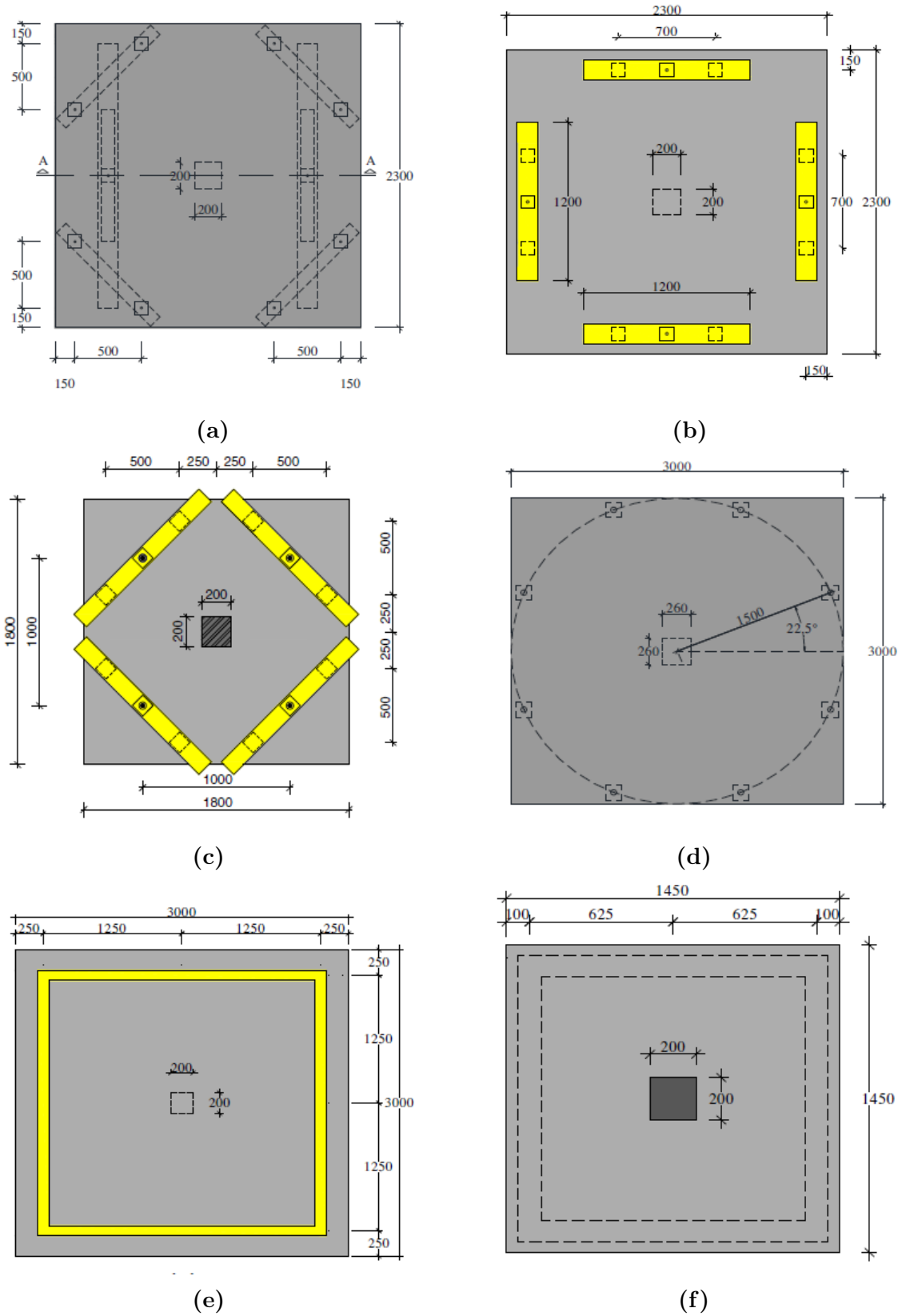
Modelos	B [mm]	h [mm]	d [mm]	Espaçamento de armadura	
				Inferior	Superior
AR2	2300	100	80	$\phi 6 // 200$ mm	$\phi 10 // 60$ mm
AR9	2300	100	80	$\phi 6 // 200$ mm	$\phi 10 // 60$ mm
DF1	2300	100	69	$\phi 6 // 200$ mm	$\phi 10 // 60$ mm
DF4	2300	120	88	$\phi 6 // 200$ mm	$\phi 10 // 75$ mm
ID1	1800	120	87	$\phi 6 // 200$ mm	$\phi 10 // 75$ mm
PG11	3000	250	208	$\phi 8 // 145$ mm	$\phi 16$ e $20 // 290$ mm
PG19	3000	250	206	$\phi 10 // 125$ mm	$\phi 16 // 125$ mm
PG20	3000	250	201	$\phi 10 // 100$ mm	$\phi 20 // 100$ mm
PG2-b	3000	250	210	$\phi 8 // 150$ mm	$\phi 10 // 150$ mm
PG5	3000	250	210	$\phi 8 // 115$ mm	$\phi 10 // 115$ mm
PG3	6000	500	456	$\phi 8 // 135$ mm	$\phi 16 // 135$ mm
ND65-1-1	3000	320	275	-	$\phi 25 // 120$ (X) mm $\phi 20 // 120$ (Y) mm
P200	725	240	200	$2\phi 16$	$\phi 12 // 120.8$ mm

### 4.1.1 Carregamento

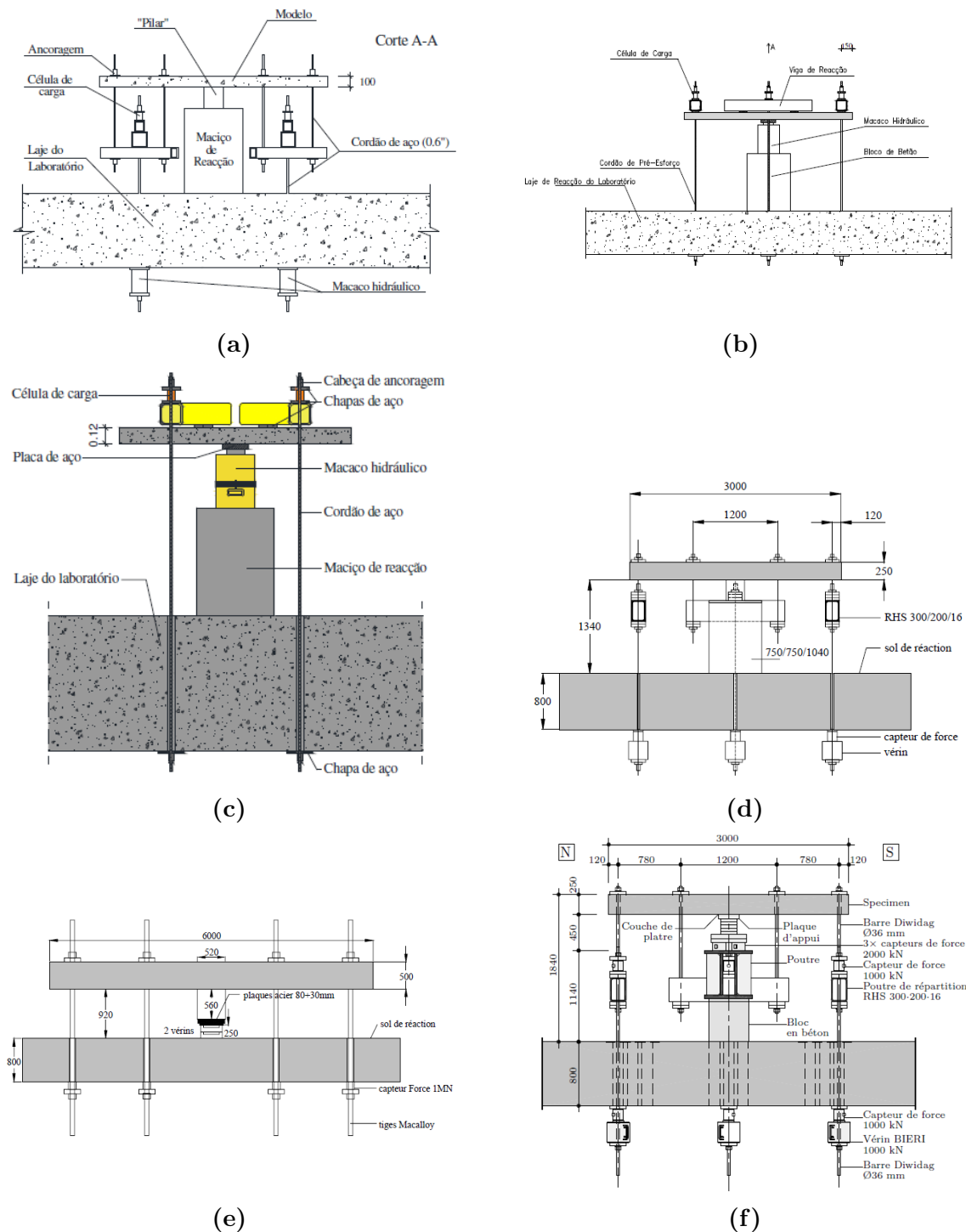
Os ensaios experimentais não são exatamente iguais. A razão para isso, deve-se à reduzida espessura da família da laje AR e do modelo DF1, além da realização dos ensaios em diferentes laboratórios.

Relativamente ao carregamento, nas lajes AR2 e AR9, Figura 4.2a, a carga vertical foi aplicada por dois macacos hidráulicos. A carga foi transferida para a laje por oito cabos de pré-esforço e um sistema de perfis metálicos. O pilar foi simulado por uma placa de aço de secção  $200 \times 200$  mm<sup>2</sup> e espessura de 50 mm, que serviu também de suporte do modelo. A transferência de carga dos cabos de pré-esforço às lajes foi feita por oito pontos no seu topo, através de placas de aço de secção  $100 \times 100$  mm<sup>2</sup> com espessura de 20 mm.

## 4.1. Modelos experimentais



**Figura 4.1:** Planta dos modelos experimentais: (a) AR2 e AR9, (b) DF1 e DF4, (c) ID1, (d) PG's (PG3 com dobro da dimensão), (e) ND621-1 e (f) P200 (dimensão em mm). Adaptado Mamede [35]



**Figura 4.2:** Representação em corte dos modelos experimentais: (a) AR2 e AR9 [38], (b) DF1 e DF4 [10], (c) ID1 [8], (d) PG2-b e PG5 [14], (e) PG3 [15] e (f) PG11, PG19 e PG20 [15].

Os modelos PG11, PG19, PG20, PG2-b e PG5, Figura 4.2d e 4.2f, foram ensaiados de forma similar às lajes anteriores. Entretanto, o pilar foi simulado por uma placa de aço de secção  $260 \times 260 \text{ mm}^2$  e as placas metálicas que transmitiam as cargas dos cabos de pré-esforço às lajes tinha secção  $200 \times 200 \text{ mm}^2$ . Foram utilizados quatro macacos hidráulicos.

As lajes DF1, DF4 e ID1, Figura 4.2b e 4.2c, encontravam-se apoiadas em placas quadrangulares de secção  $200 \times 200 \text{ mm}^2$  que simulavam o pilar. O carregamento foi aplicado através de um macaco hidráulico no centro da laje. A laje PG3, Figura 4.2e, foi ensaiada de modo similar aos modelos anteriores, todavia, com a placa metálica ao centro de geometria quadrangular e secção  $520 \times 520 \text{ mm}^2$ . O carregamento foi aplicado nesta placa. Neste ensaio, foram considerados dois macacos hidráulicos. Oito placas metálicas dispostas sobre o modelo ao longo da sua extremidade serviram de apoio, e ligava este à laje do laboratório através de cabos de pré-esforço.

A carga na laje ND65-1-1 foi transferida por um macaco hidráulico e a laje suportada ao longo do seu contorno. O modelo P200 foi ensaiado invertidamente, estando o modelo apoiado numa estrutura metálica ao longo dos bordos e a carga foi aplicada sobre o pilar de secção de  $200 \times 200 \text{ mm}^2$ .

### 4.1.2 Monitorização dos modelos experimentais

Para o controlo e análise de dados posteriores aos ensaios, aplicaram-se diferentes dispositivos para os registos de dados. Os defletómetros foram introduzidos com vista a registar a evolução dos deslocamentos verticais. As células de carga foram consideradas para quantificar os valores das cargas verticais aplicadas. Visto que as disposições dos defletómetros nos modelos experimentais apresentam simetria, na Figura 4.3, é ilustrado uma das faces de um quarto das lajes, onde estes dispositivos foram inseridos. Esta ilustração apresenta resumidamente a disposição dos defletómetros em todas as lajes com exceção das ND65-1-1 e P200 (não foram utilizados).

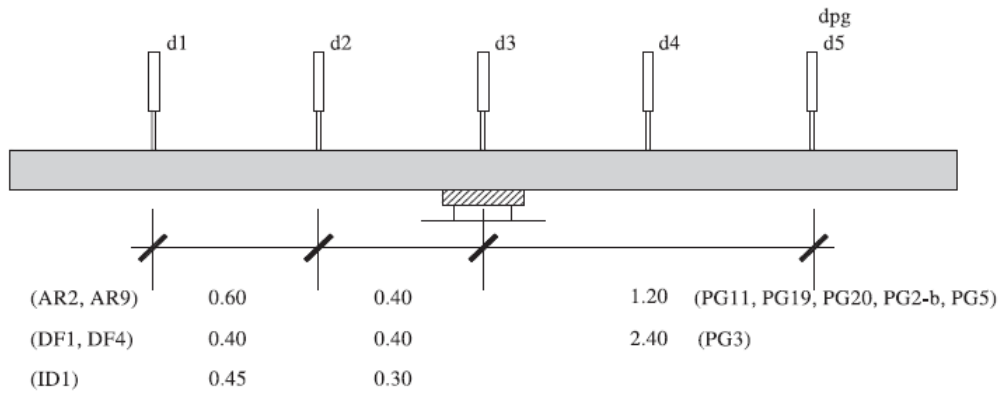
Nas lajes AR2 e AR9 foram inseridos nove defletómetros dispostos nas duas direções ortogonais ao longo dos eixos de simetria, com um dos mesmos no centro destas lajes. Na Figura 4.3, ilustra-se para uma parte de um eixo de simetria os dispositivos  $d1$  e  $d2$ . Para o registo da evolução carga foram incorporadas células de carga conforme ilustrado na Figura 4.2a.

Nos modelos DF1 e DF4 foram utilizados defletómetros distribuídos numa das direções ortogonais sobre o eixo de simetria. A disposição dos mesmos é ilustrada também na Figura 4.3, para os defletómetros  $d1$  e  $d2$  na metade da face. Nestes modelos, quatro células de carga foram instaladas como ilustra a Figura 4.2b

A instrumentação da laje ID1 é idêntica às lajes DF1 e DF4. Na Figura 4.3 ilustra-se o posicionamento dos defletómetros e na Figura 4.2c pode ser observado o posiciona-

mento das células de carga.

Nas lajes da família PG, foram utilizados um total de cinco defletómetros. Estes dispositivos,  $d_{pg}$ , estão dispostos como ilustrado na Figura 4.3. Relativamente às células de carga, estas podem ser observadas na Figura 4.2d, 4.2e e 4.2f para as lajes PG2-b e PG5; PG3; PG11, PG19 e PG20, respetivamente.



**Figura 4.3:** Disposição dos defletómetros nas lajes de grupo AR, DF, ID e PG [35].

### 4.1.3 Caraterização dos materiais

#### 4.1.3.1 Betão

A tensão de rotura à compressão do betão em provetes cúbicos,  $f_{ccm}$ , foi obtido experimentalmente para as lajes AR2, AR9, DF1, DF4 e ID1. Para as restantes lajes os ensaios à compressão uniaxial foram realizados em provetes cilíndricos.

Na Tabela 4.2, apresentam-se as expressões para determinação das caraterísticas do betão, na ausência destes nos ensaios experimentais. A resistência à compressão do betão em provetes cilindros,  $f_{cm}$ , foi admitida como 80% de  $f_{ccm}$ . Tanto a resistência de rotura à tração do betão,  $f_{ctm}$ , como o módulo de elasticidade,  $E_{cm}$ , foram obtidos através das relações presentes no EC2 [22]. Dada a origem calcária dos agregados utilizados no fabrico do betão, o módulo de elasticidade determinou-se sob uma redução de 10% (EC2 [22]). A energia de fratura do betão,  $G_f$ , foi obtida segundo a recomendação do *Model Code 1990* [5], consoante as variações das dimensões máximas dos agregados,  $d_g$ . A definição da abertura de fendas encontra-se em conformidade com a recomendação do *Model Code 1990* [5].

## 4.1. Modelos experimentais

**Tabela 4.2:** Expressões para determinação da característica do betão

Parâmetro	Equação	
Tensão de rotura do betão à compressão	$f_{cm} = 0.8 \cdot f_{ccm}$	[MPa]
Extensão em $f_{cm}$	$\varepsilon_{c1} = 0.7 \cdot f_{cm}^{0.3}$	
Tensão de rotura do betão à tração simples	$f_{ctm} = 0.30 \cdot (f_{cm} - 8)^{2/3}$	[MPa]
Abertura de fenda	$w_c = 5, 14 \cdot \frac{G_f}{f_{ctm}}$	[m]
Modulo de elasticidade secante	$E_{cm} = 9.923 \cdot f_{cm}^{0.3}$	[MPa]
Energia de fratura	$G_f = G_{f0} \cdot (f_{cm}/f_{cmo})^{0.7}$	Nm/m <sup>2</sup>
	$f_{cmo} = 10MPa$	[MPa]
	$G_{f0} = 0.025$ se $d_{max} = 8$ mm	[Nmm/mm <sup>2</sup> ]
	$G_{f0} = 0.030$ se $d_{max} = 16$ mm	[Nmm/mm <sup>2</sup> ]
	$G_{f0} = 0.058$ se $d_{max} = 32$ mm	[Nmm/mm <sup>2</sup> ]

A Tabela 4.3 apresenta os valores característicos médios do betão determinados pela aplicação das expressões presentes na Tabela 4.2, consoante a inexistência dos mesmos nos ensaios experimentais.

**Tabela 4.3:** Características do betão utilizados nos vários modelos [34].

Modelo	$f_{ccm}$ [MPa]	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]	$E_c$ [GPa]	$G_f$ [Nm/m <sup>2</sup> ]	$d_g$ [mm]
AR2	48.9	39.1	3.0	29.8	78	16
AR9	46.4	37.1	2.8	29.3	75	16
DF1	31.0	24.8	2.0	26	57	16
DF4	24.7	19.8	1.6	24.3	48	16
ID1	49.2	39.8	3.0	30	79	16
PG11	-	31.5	2.5	33.2	67	16
PG19	-	46.2	3.2	32.7	88	16
PG20	-	51.7	3.4	33.9	95	16
PG2-b	-	40.5	3.0	34.7	80	16
PG5	-	29.3	2.3	26.8	53	4
PG3	-	32.4	2.1	31.8	68	16
ND65-1-1	-	64.3	4.3	38.1	110	16
P200	-	39.5	3.3	29.9	97	20

### 4.1.3.2 Aço

Na Tabela 4.4 apresenta-se a tensão de cedência,  $f_{sy}$ , e a tensão rotura,  $f_{su}$ , das armaduras usadas nos modelos experimentais. A falta de dados do conjunto da tensão de cedência,  $f_{sy}$ , e tensão rotura,  $f_{su}$  deve-se a inexistência da armadura naquela posição nos modelos.

**Tabela 4.4:** Caraterização da armadura de aço adotados nos modelos [34].

Modelos	Armadura inferior		Armadura superior	
	$f_{sy}$ [MPa]	$f_{su}$ [MPa]	$f_{sy}$ [MPa]	$f_{su}$ [MPa]
AR2	639	732	523	613
AR9	555	670	481	633
DF1	537	656	541	637
DF4	561	678	537	648
ID1	588	697	445	582
PG11	531	-	538	-
PG19	500	-	551	-
PG20	500	-	510	-
PG2-b	500	-	552	-
PG5	500	-	555	-
PG3	500	-	520	-
ND65-1-1	-	-	500	-
P200	-	-	465	-

## 4.2 Modelos numéricos

Nesta secção descrevem-se de forma sucinta, as opções assumidas na definição da geometria dos modelos, malha de elementos finitos, aplicação das cargas e as propriedades materiais adotadas na modelação. Na elaboração dos modelos numéricos, que se apresentam de seguida, teve-se em consideração os trabalhos de Almansa [2], Malm [32], Mamede [33, 35] e Winkler [46].

Os modelos numéricos foram elaborados, modelando apenas um quarto dos modelos experimentais, tirando partido da simetria. Este processo permite em primeiro lugar a simplificação da análise numérica, por outro lado, promove a rapidez no processamento de dados e naturalmente a redução de esforço computacional. Todos os aspetos necessários para permitir similaridade entre os modelos experimentais e numéricos foram modelados. Na Figura 4.4 observa-se além da laje, também os elementos que representam o pilar e as placas metálicas que transmitem as cargas de pré-esforço às lajes. Em torno do pilar desenvolveu-se uma secção quadrangular, dada pela relação  $2h$  da face do pilar, destinado à atribuição de maior refinamento da malha de elementos finitos.



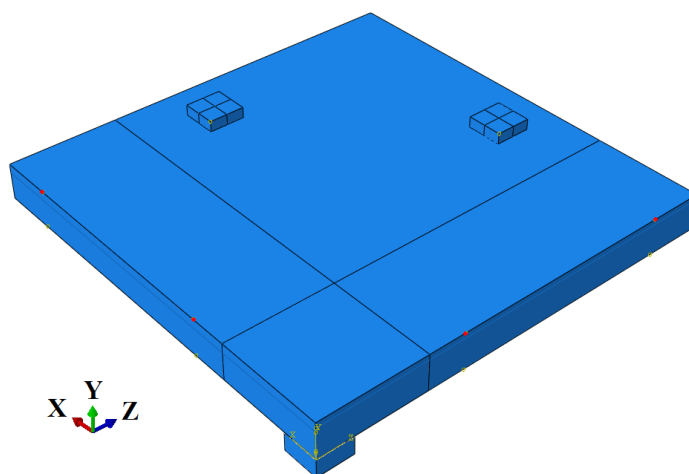


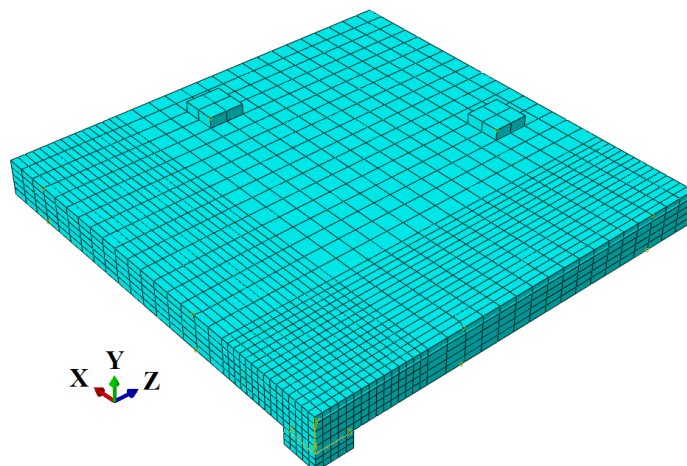
Figura 4.4: Modelo da laje

### 4.2.1 Malha de elementos finitos

O elemento finito adotado foi o elemento tridimensional contínuo de oito nós com integração reduzida, C3D8R, para a laje (betão), o suporte e as placas. As armaduras de aço foram modeladas com a família *truss*, elemento T2D3.

Relativamente às malhas de elementos finitos, procurou-se promover a uniformização do mesmo entre os diferentes modelos de lajes. Na zona em torno do pilar foi considerado um maior refinamento de malha, conforme apresentado na Figura 4.5. Estas zonas usam os elementos finitos de geometria cúbica, cujo lado tem a dimensão igual a um quinto da espessura,  $h/5$ . No exterior desta área, a malha de elementos finitos apresenta uma dimensão máxima igual duas vezes e meia da dimensão anterior,  $2.50 \times h/5$ . Ao gerar a malha, considerando este critério, é recomendado o uso de comando `Mesh Control1`. Considerando a laje AR2 como exemplo, cuja a espessura é 100 mm, aplicando este critério obtém-se para zona junto ao pilar (de maior refinamento), elementos finitos cúbicos de lado igual a 20 mm, e nas restantes zonas deste modelo obtém-se elementos finitos com dimensão máxima de 50 mm.

Nos outros elementos dos ensaios considerou-se o seguinte: as placas metálicas com quatro elementos finitos; o suporte (pilar) com elementos de dimensão igual ou aproximado da zona de maior refinamento; e as armaduras com elementos finitos de dimensão igual ao da zona de maior refinamento,  $h/5$ .



**Figura 4.5:** Modelo da malha de elementos finitos

### 4.2.2 Condições de fronteira

Dada a simetria do problema, na modelação, os modelos foram reduzidos a um quarto das lajes originais, entretanto, introduziu-se condições para garantir a equivalência aos modelos experimentais. As condições de apoio refletem a simetria do problema graças à aplicação de encastramentos deslizantes nas faces correspondentes aos eixos de simetria, em que foram restringidos todos os graus de liberdade fora do plano de corte. No elemento de suporte, junto aos eixos de simetrias, foi restringido o grau de liberdade associado ao deslocamento vertical. Nas placas metálicas, de aplicação de carga, situada sobre a laje, na zona de momentos nulos, foram introduzidas (no ponto ao centro na face superior) restrições aos deslocamentos no plano horizontal. Ao libertar os restantes movimentos, é assegurado que estas placas acompanhem a rotação das lajes e o movimento da direção de aplicação da carga durante o carregamento.

Em todos os modelos o carregamento foi realizado através da aplicação dos deslocamentos verticais nas placas metálicas.

### 4.2.3 Caracterização dos materiais

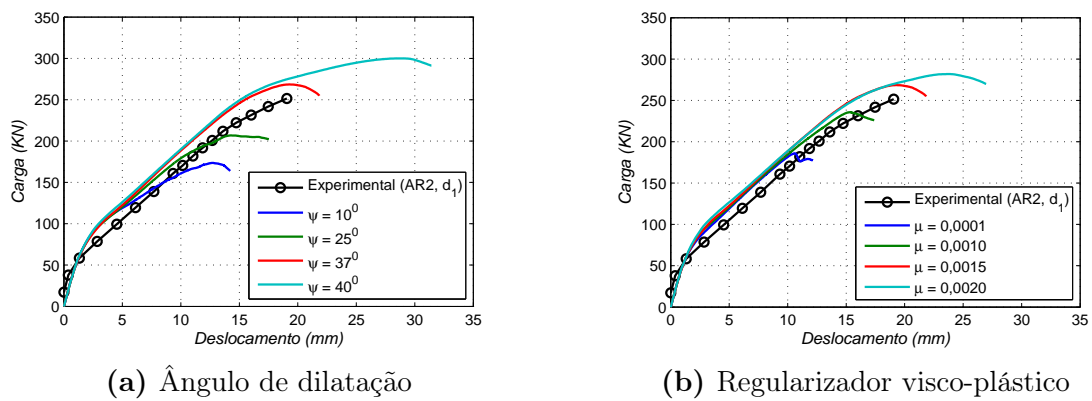
As propriedades materiais utilizadas na análise numérica foram identificadas na Tabelas 4.3 e 4.4. Nas placas de aço e suporte, foram modelados considerando o comportamento quase rígido, admitindo um aumento do módulo da elasticidade.

#### 4.2.3.1 Betão

##### Modelo CDP

A análise com recurso ao modelo CDP no Abaqus requer a definição dos parâmetros específicos (secção 3.2). É necessário ajustar os valores dos mesmos através

de um estudo de calibração para garantir a qualidade do modelo numérico usado no estudo paramétrico e para justificar as opções consideradas para obtenção do modelo final. Para definir a lei constitutiva do betão foram ajustados ângulo da dilatação ( $\psi$ ) e o parâmetro da viscosidade ( $\mu$ ). A fim de averiguar influência destes nos resultados, variou-se o ângulo  $\psi$  entre  $10^\circ$  e  $40^\circ$ . O valor de parâmetro da viscosidade utilizado para regularização, foi variada entre 0.0005 e 0.002. Na Figura 4.6 apresenta a sensibilidade da resposta numérica para o modelo AR2, tendo observado resultados satisfatórios associados ao ângulo  $\psi = 37^\circ$  e ao parâmetro de viscosidade  $\mu = 0.0015$ .



**Figura 4.6:** Estudo para determinação ângulo de dilatação e regularizador visco-plástico

Ao analisar as restantes lajes assumindo estes parâmetros com valores que se obteve para modelo AR2, verificou-se resultados satisfatórios, porém, nos modelos de Guandilini [14] (de baixa percentagem de armadura), particularmente modelos PG2-b e PG3, foi necessário proceder a redução de valor do parâmetro  $\mu$ , para valores de 0.0010 e 0.0005, respetivamente.

A Tabela 4.5 apresenta os valores dos parâmetros utilizados na calibração do modelo de comportamento CDP .

**Tabela 4.5:** Parâmetros do modelo CDP

$\psi$	$\epsilon$	$f_{b0}/f_{c0}$	$k_c$	$\mu$
37	0.1	1.16	0.6667	0.0015
				0.0010 (PGb-2)
				0.0005 (PG3)

### Variável de dano, $d_c$ e $d_t$

Adotou-se a lei de dano descrita pela expressão 3.21 para a análise. As variáveis de dano obtidas por esta lei para diferentes classes do betão alteram consoante a variação de parâmetros que mudam as extensões, como por exemplo a dimensão do elemento finito ( $l_{eq}$ ). Durante o processo de calibração houve necessidade de alterar a condição da expressão 3.22b, pela redução do nível degradação. Assim, a condição inicial, expressão 3.22b, passou a definir-se com um dano máximo à tração ( $d_{t_{max}}$ ) de 98% e à compressão ( $d_{c_{max}}$ ) de 90% como apresentado nas expressões 4.1a e 4.1b.

$$\varepsilon_t^{pl} = \varepsilon_{t_{max}}^{pl} \quad d_{t_{max}} = 0.98 \quad (4.1a)$$

$$\varepsilon_c^{pl} = \varepsilon_{c_{max}}^{pl} \quad d_{c_{max}} = 0.90 \quad (4.1b)$$

E as constantes  $a_{i=t,c}$  na expressão 3.21 foram determinadas pela sua inversão, através das expressões seguinte:

$$a_t = \frac{\ln(1 - d_{t_{max}})}{\varepsilon_{t_{max}}^{in}} \quad (4.2a)$$

$$a_c = \frac{\ln(1 - d_{c_{max}})}{\varepsilon_{c_{max}}^{in}} \quad (4.2b)$$

Na Tabela 4.6, apresenta os valores das constantes  $a_t$  e  $a_c$  dos modelos.

Outras leis de dano, descritas pelas expressões 3.20, 3.24 e 3.23, foram analisados, contudo, com resultados não satisfatórios. Com a expressão 3.20 o programa Abaqus abortava a análise de modo precoce, e único resultado obtido, a carga de rotura foi consideravelmente baixa. A lei de Jankowiak [23], equação 3.24, os modelos apresentavam comportamento excessivamente dúctil, com a carga de rotura consideravelmente superior ao experimental. Os resultados com a expressão 3.23 evidenciava uma semelhança ao da equação 3.24.

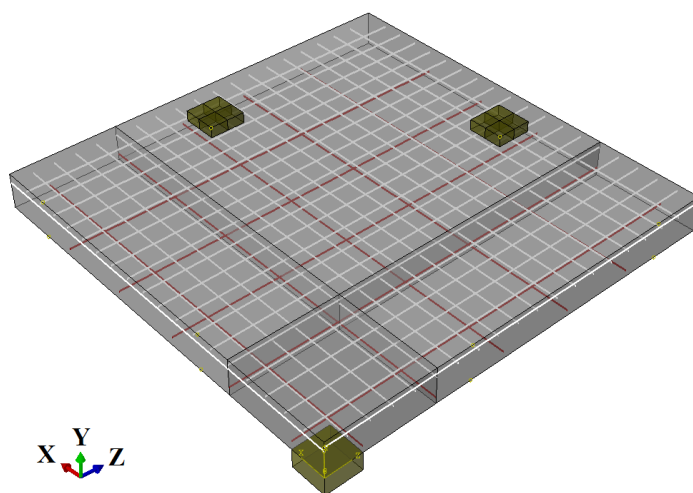
#### 4.2.3.2 Aço

Os varões de aço foram considerados com comportamento bilinear sem endurecimento e introduzidos como armadura discreta, modelados com elementos *truss*, T2D3. As armaduras coincidentes com os eixos de simetria, foram simuladas com metade da área. A aderência entre o betão e a armadura foi feita pelo comando `embedded element`. Este garante uma aderência perfeita entre o betão e a armadura de aço, na sua conceção considera o betão como elemento hospedeiro, *host element* e o aço elemento embebido, *embedded element*.

**Tabela 4.6:** Caraterização do betão utilizado nos vários modelos

Modelo	$f_{cm}$ [MPa]	$a_t$ -	$a_c$ -	$l_{eq}$ [mm]	Armadura superior			Armadura inferior		
					$f_{sy}$ [MPa]	$\varepsilon_s$ [%]	$\varepsilon_u$ [%]	$f_{sy}$ [MPa]	$\varepsilon_s$ [%]	$\varepsilon_u$ [%]
AR2	39.1	591.46	85.05	20	523	2.62	75	639	3.20	75
AR9	37.1	639.14	85.19	20	481	2.41	75	555	2.78	75
DF1	24.8	587.47	86.22	20	541	2.71	75	537	2.69	75
DF4	19.8	652.120	102.92	24	537	2.69	75	561	3.31	75
ID1	39.8	645.54	85.01	24	445	2.23	75	588	2.94	75
PG11	31.5	1553.79	192.92	50	538	2.69	75	531	2.66	75
PG19	46.2	1642.95	188.18	50	551	2.76	75	500	2.50	75
PG20	51.7	1661.03	186.03	50	510	2.55	75	500	2.50	75
PG2-b	40.5	1111.85	189.77	50	552	2.76	120	500	2.50	120
PG5	29.3	2082.01	197.47	50	555	2.78	120	500	2.50	120
PG3	32.4	2186.95	329.83	100	520	2.60	120	500	2.50	120
ND65-1-1	64.3	2161.31	222.69	64	500	2.50	75	-	-	-
P200	39.5	1547.77	183.94	48	465	2.32	75	-	-	-

Na Figura 4.7 apresenta o modelo de armadura, neste caso para laje AR2.



**Figura 4.7:** Modelo de armadura

### 4.2.4 Monitorização dos modelos numéricos

Foram monitorizados determinados pontos no modelo, correspondentes aos de modelos experimentais. A simulação de célula de carga foi feita pela monitorização do histórico da carga junto ao pilar, no ponto em que é impedido o deslocamento vertical. Na Figura 4.8 apresenta-se um exemplo dos pontos monitorizados (AR2).

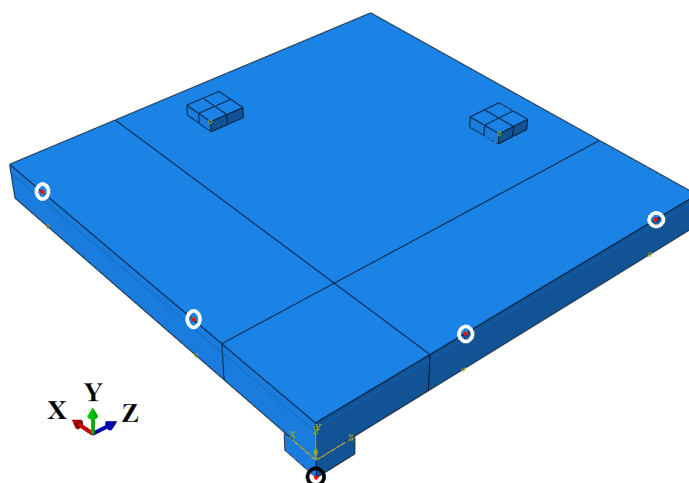


Figura 4.8: Monitorização

## 4.3 Análise dos resultados

Nesta secção procede-se à análise de dados obtidos dos modelos numéricos. Para isso faz-se a comparação detalhada entre os resultados dos modelos experimentais e os numéricos utilizando os valores dos deslocamentos verticais e das cargas de rotura dos modelos. Procede-se ainda, à realização de uma comparação qualitativa em termos estatísticos com os resultados obtidos por Mamede [33, 34] e as previsões das normas e regulamentos, nomeadamente o EC2 [22] e MC2010 [12].

### 4.3.1 Deslocamentos verticais, modelos AR2 e AR9

Nos ensaios experimentais destes modelos, os deslocamentos verticais foram lidos pelos oito dispositivos. Nos ensaios numéricos, devida a simplificação adotada através da simulação de apenas um quarto destes modelos, a leitura dos deslocamentos verticais foram efetuadas em apenas quatro pontos. Para comparação dos deslocamentos entre os experimentais e os numéricos, procedeu-se à determinação de valores médios dos defletómetros situados simetricamente nos modelos experimentais, conforme apresentado na Tabela 4.7.

**Tabela 4.7:** Deslocamentos verticais dos modelos AR2 e AR9 [33].

Deslocamento	Média
Deslocamento 1 (d1)	Deflectómetro 1 e deflectómetro 5
Deslocamento 2 (d2)	Deflectómetro 2 e deflectómetro 4
Deslocamento 3 (d3)	Deflectómetro 6 e deflectómetro 9
Deslocamento 4 (d4)	Deflectómetro 7 e deflectómetro 8

### 4.3. Análise dos resultados

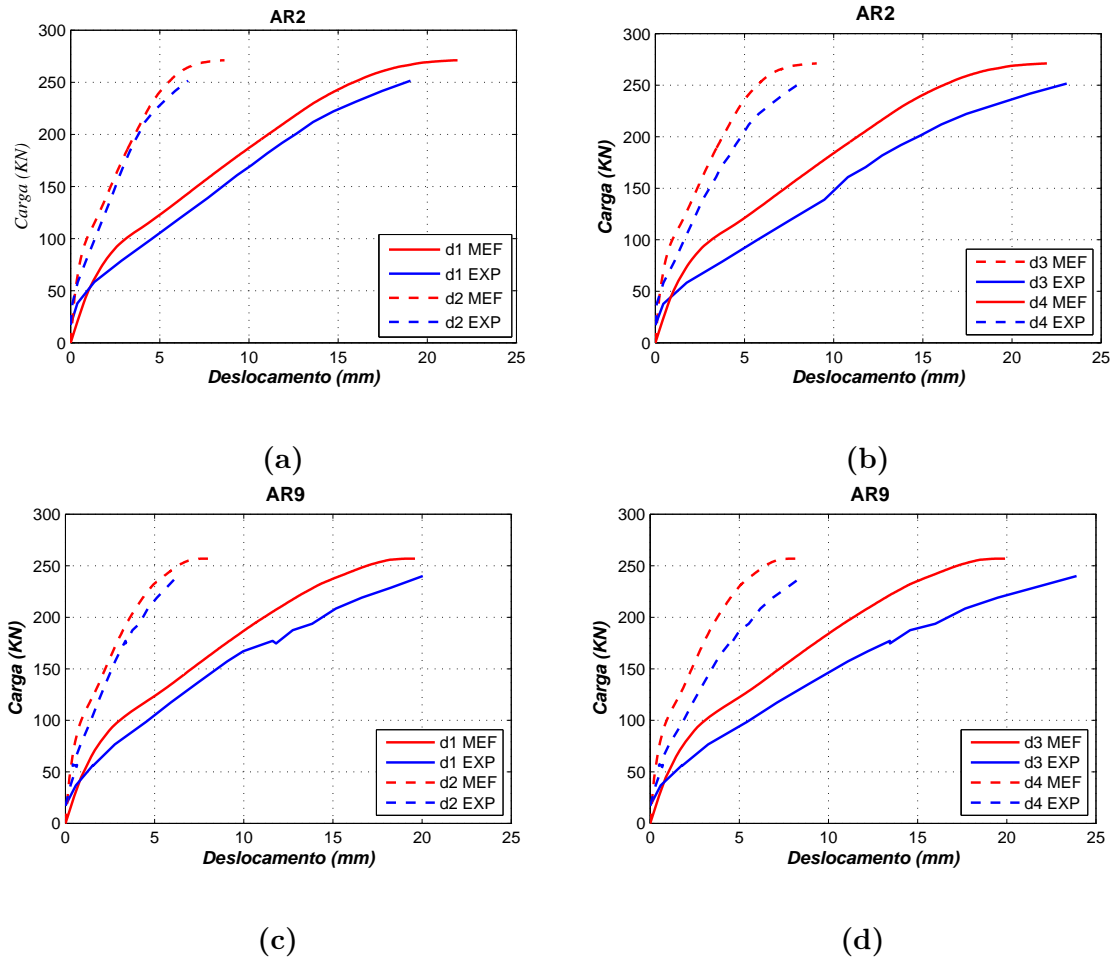
Na Tabela 4.8, é apresentado para os diferentes níveis de carga a relação dos valores experimentais (EXP) e da modelação numérica (MEF), as médias e os obtidos por Mamede [33]. Na Figura 4.9, ilustra-se os gráficos da relação carga-deslocamento da leitura nos pontos monitorizados.

**Tabela 4.8:** Deslocamentos verticais dos modelos AR2 e AR9

Modelo		AR2			AR9		
Carga [KN]		100	150	200	100	150	200
<b>d1 [mm]</b>	EXP	4.58	8.53	12.61	4.64	8.5	14.40
	MEF	3.11	7.09	11.08	3.06	7.08	11.13
	EXP/MEF	1.47	1.20	1.14	1.51	1.2	1.29
	Média		1.27			1.34	
	Média Mamede [33]		1.08			1.15	
<b>d2 [mm]</b>	EXP	1.36	2.52	3.80	1.43	2.61	4.35
	MEF	0.92	2.25	3.60	0.89	2.24	3.63
	EXP/MEF	1.49	1.12	1.06	1.61	1.17	1.2
	Média		1.22			1.32	
	Média Mamede [33]		1.13			1.23	
<b>d3 [mm]</b>	EXP	5.74	10.15	14.73	5.57	10.37	16.70
	MEF	3.15	7.28	11.33	3.09	7.25	11.39
	EXP/MEF	1.82	1.39	1.30	1.80	1.43	1.47
	Média		1.51			1.57	
	Média Mamede [33]		1.29			1.35	
<b>d4 [mm]</b>	EXP	1.63	3.04	4.81	1.88	3.47	5.81
	MEF	0.96	2.35	3.77	0.93	2.33	3.77
	EXP/MEF	1.70	1.29	1.28	2.02	1.49	1.54
	Média		1.42			1.68	
	Média Mamede [33]		1.31			1.55	

Estes resultados não evidenciam de modo acentuado a influência da diferença da altura útil das armaduras nas duas direções ortogonais observadas nos resultados experimentais. Os deslocamentos registados numericamente pelos defletómetros localizados na direção das armaduras de maior altura útil, d1 e d2, apresentam melhores aproximações à evolução dos deslocamentos experimentais que os de d3 e d4. Por outro lado, qualquer nível de carga evidencia menor deslocamento obtido numericamente em comparação com o deslocamento do mesmo nível obtido experimentalmente. Conclui-se assim que os modelos numéricos apresentam comportamento mais rígidos que os experimentais, nestes casos.

As cargas de rotura obtidas numericamente apresentam-se sobrestimadas em relação à experimental. Contudo, ao analisar o estudo efetuado, presente na Tabela 4.8, e procedendo uma análise em termos gráficos de acordo com a Figura 4.9, pode considerar-se que estes resultados são satisfatórios.



**Figura 4.9:** Relação força-deslocamento (d1, d2 ,d3 e d4) - EXP vs MEF. Laje AR2 ((a) e (b)) e AR9 (c) e d)).

Ao comparar a média dos deslocamentos de diferentes níveis de carga deste estudo e o que obteve Mamede [31] com o programa Atena 3D, observa-se que o mesmo obteve melhores aproximações e menos rígidos.

### 4.3.2 Deslocamentos verticais, modelos DF1, DF4 e ID1

Para a avaliação dos deslocamentos verticais destes modelos, procedeu-se à análise em apenas dois pontos, considerando a média entre os registos de defletómetros simétricos. Na Tabela 4.9 são identificados os pontos considerados para essa simplificação.

**Tabela 4.9:** Deslocamentos verticais dos modelos DF1 e DF2 [33].

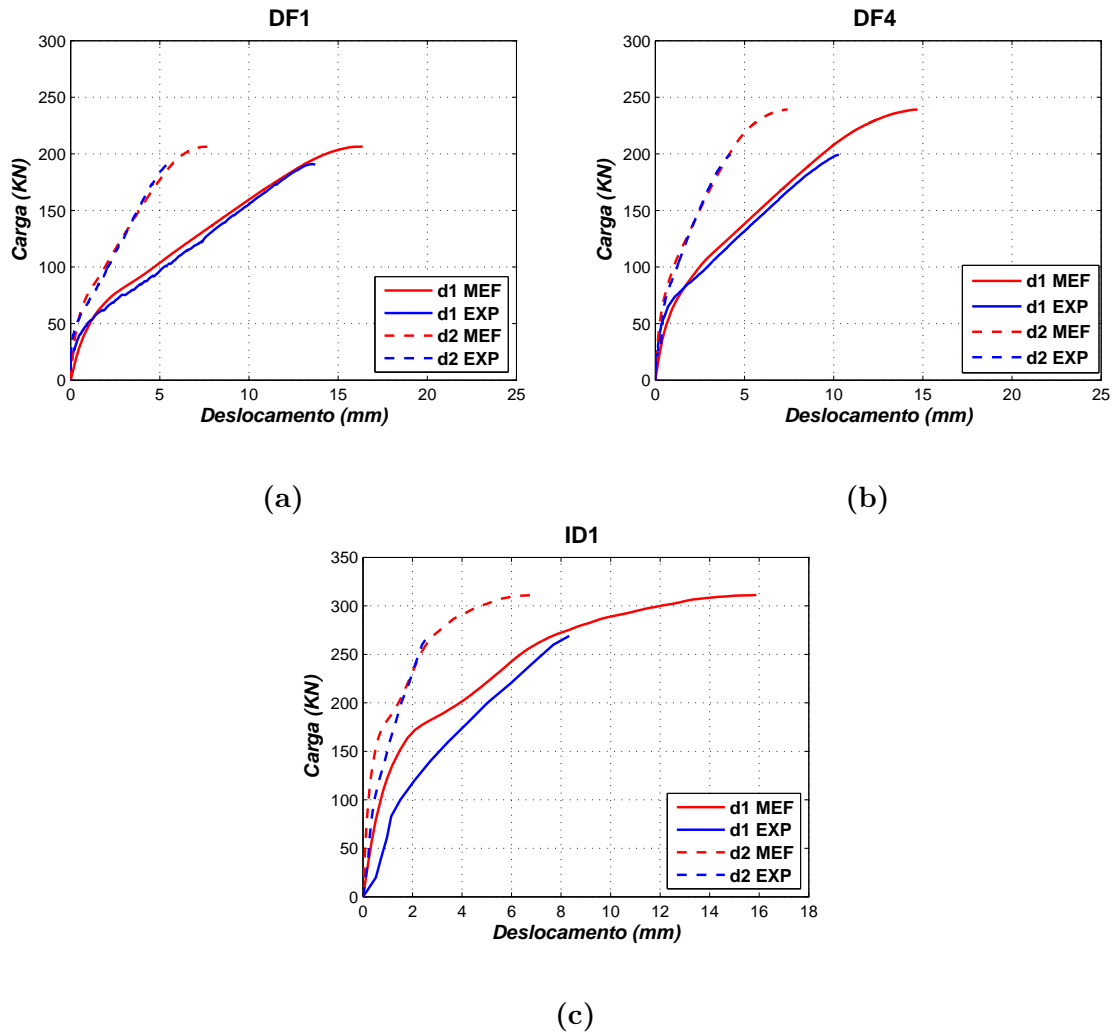
Deslocamento	Média
Deslocamento 1 (d1)	Deflectómetro 1 e deflectómetro 5
Deslocamento 2 (d2)	Deflectómetro 2 e deflectómetro 4



### 4.3. Análise dos resultados

**Tabela 4.10:** Deslocamentos verticais dos modelos DF1, DF4 e ID1.

Modelo		DF1		DF4		ID1		
Carga [kN]		100	150	100	150	100	150	200
d1 [mm]	EXP	2.07	5.23	1.22	2.92	1.51	3.09	5.03
	MEF	1.93	4.76	0.99	2.48	0.72	1.47	3.94
	EXP/MEF	1.08	1.10	1.24	1.18	2.10	2.10	1.28
	Média	1.09		1.21		1.82		
	Média Mamede [33]	1.00		0.86		1.32		
d2 [mm]	EXP	3.76	9.52	2.45	6.26	0.46	0.98	1.55
	MEF	3.86	9.24	2.40	5.81	0.22	0.49	1.41
	EXP/MEF	0.97	1.03	1.02	1.08	2.07	2.02	1.10
	Média	1.00		1.05		1.73		
	Média Mamede [33]	1.07		0.79		1.41		



**Figura 4.10:** Relação força-deslocamento (d1 e d2) - EXP vs MEF. Laje DF1 (a), DF4 (b) e ID1 (c)

## Capítulo 4. Calibração do Modelo Numérico

Na Tabela 4.10, são apresentados os deslocamentos associados a níveis de carga, determinada pela relação entre os valores EXP e os de MEF, e a comparação com os obtidos por Mamede [33].

Após análise das últimas tabela e os gráficos apresentados, pode afirmar-se que os resultados numéricos aproximam satisfatoriamente aos experimentais, sobretudo para modelos de DF1 e DF4. Entretanto, os resultados relativo a ID1, não se conseguiu com melhor da eficácia, onde é demonstrado uma discrepância significativa em baixos níveis de carga.

As cargas de rotura apresentam-se sobrestimadas em comparativamente ao experimental. Nestes modelos a capacidade de deformação na análise numérica foi superior que dos experimentais, mais acentuado nos modelos DF4 e ID1.

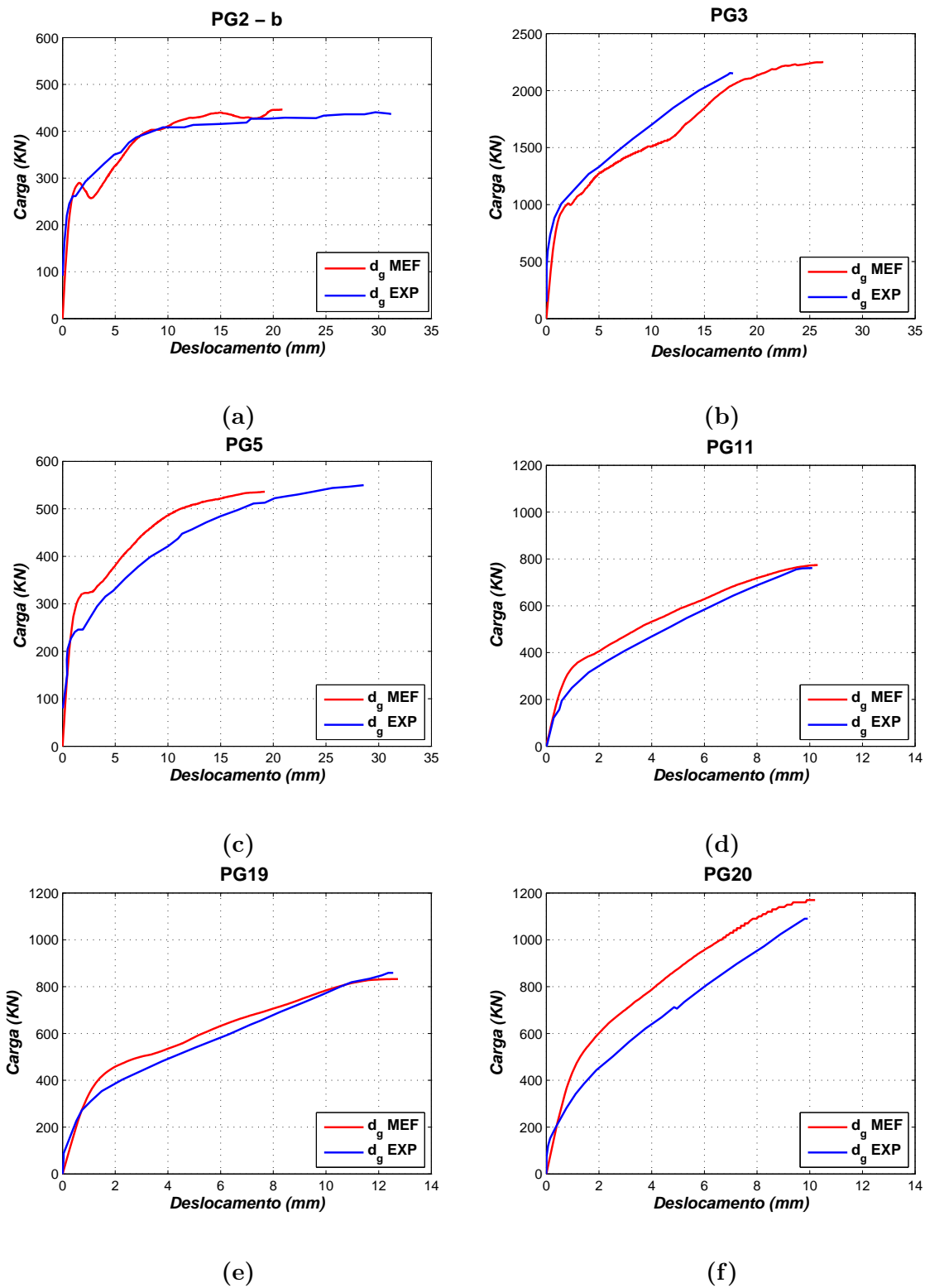
Quando comparado com os valores médios dos deslocamentos de Mamede, observa-se que é equivalente o modelo da laje DF1, e que DF4 e ID1 apresentam-se mais rígidos com Abaqus.

### 4.3.3 Deslocamentos verticais, modelos PG's

Os deslocamentos da série PG foram retirados do ponto de monitorização  $d_{pg}$  (Figura 4.3). Os gráficos que se seguem apresentam as relações cargas-deslocamentos da leitura realizada no ponto de monitorização, para resultados numéricos e os experimentais. Na Tabela 4.11 apresenta-se para diferentes patamares de carga a relação entre os deslocamentos verticais dos modelos experimentais e os numéricos.

**Tabela 4.11:** Deslocamentos verticais dos modelos PG

		PG2-b			PG3		
	Carga (KN)	150	250	350	500	1000	1500
dg (mm)	EXP	0.15	0.74	4.92	0.06	1.38	7.17
	MEF	0.72	0.85	5.81	0.51	1.93	9.59
	EXP/MEF	0.20	0.87	0.85	0.11	0.72	0.75
	Média		0.64			0.53	
		PG5			PG11		
	Carga (KN)	150	250	350	200	400	600
dg (mm)	EXP	0.43	2.05	5.80	0.62	2.86	6.30
	MEF	0.45	0.88	1.47	0.43	1.93	5.46
	EXP/MEF	0.94	2.32	3.95	1.46	1.48	1.15
	Média		2.40			1.36	
		PG19			PG20		
	Carga (KN)	200	400	600	250	500	750
dg (mm)	EXP	0.43	2.22	6.39	0.61	2.51	5.41
	MEF	0.52	1.36	1.18	0.50	1.30	3.63
	EXP/MEF	0.84	1.63	5.42	1.23	1.92	1.49
	Média		2.63			1.55	



**Figura 4.11:** Relação força-deslocamento ( $d_{pg}$ ) - EXP vs MEF. Lajes da família PG

Retira-se pela análise da Tabela 4.11 e dos gráficos da Figura 4.11, que os deslocamentos são superiores nos modelos numéricos, exceto nos modelos PG2-b e PG3, em que é verificada os valores inferiores em diferentes níveis de cargas. O processo de calibração para estes modelos foi difícil, com a necessidade proceder ao controlo de parâmetros que contribuem para verificação dos critérios da convergência. Nos ensaios experimentais de acordo com o Guandalini [14], estas lajes atingiram o seu patamar plástico e a rotura por punçoamento ocorreu com grandes deformações plásticas - rotura mista flexão-punçoamento. Estas lajes apresentam baixa percentagem de armadura, com um máximo de 0.33%, em comparação com as restantes lajes, cujo mínimo é de 0.6 % (modelo ID1). Segundo Hibbit [17], o modelo CDP apresenta sensibilidade quando nas estruturas de betão armado não é verificada armadura suficiente em área significativas.

Com exceção dos modelos PG2-b e PG3, os modelos numéricos apresentam um comportamento mais rígidos que os experimentais.

### 4.3.4 Cargas de rotura

Apresenta-se na Tabela 4.12 os resultados das cargas de rotura experimentais,  $V_{Rm,EXP}$ , numéricas,  $V_{Rm,MEF}$ , e previstas de acordo com o EC2 [22],  $V_{Rm,EC2}$  e o MC2010 [12],  $V_{Rm,MC2010}$ , as relações entre estas e os obtidos por Mamede [34]

### Eurocódigo 2

A equação 4.3 é a expressão referente ao EC2 [22] para o cálculo da resistência ao punçoamento. Neste estudo não é considerado o coeficiente de segurança no cálculo e não se limitou o parâmetro efeito de escala  $k$  a 2.

$$V_{Rm,EC2} = 0,18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{cm})^{1/3} \cdot u \cdot d \geq \nu_{min} \cdot u \cdot d \quad (4.3)$$

Em que,

- $k$  calibração geométrica das lajes, a ter em conta o efeito de escala,  
 $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$ , com  $d$  em mm;
- $\rho_l$  percentagem de armadura,  
 $\rho_l = \sqrt{\rho_{lx} \cdot \rho_{ly}} \leq 0,02$   
 $\rho_{lx}$  e  $\rho_{ly}$  referem-se às armaduras de tração aderentes nas direções  $x$  e  $y$ , respetivamente. Estes valores devem ser calculados numa largura  $b$  da laje, equivalente à largura do pilar acrescida de  $(3 \cdot d)$  para cada lado;

$f_{cm}$	resistência do betão em provete cilíndricos;
$u$	perímetro de controlo de referência a uma distância $(2 \cdot d)$ da face do pilar;
$d$	média das alturas úteis em cada direcção;
$\nu_{min}$	valor mínimo da resistência ao punçoamento; $\nu_{min} = 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot f_{cm}^{1/2}$

### Model Code 2010

A equação 4.4a permite estimar a carga de rotura ao punçoamento (*Model Code 2010*) [12], desenvolvida por Muttoni [36] com base na teoria de abertura de fenda. A avaliação da previsão da resistência ao punçoamento foi considerada ao nível de aproximação II.

$$\frac{V_R}{u_1 \cdot d \cdot \sqrt{f_{cm}}} = \frac{3/4}{1 + 15 \cdot \frac{\psi_1 \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad (4.4a)$$

$$\psi_1 = 1,5 \cdot \frac{r_s \cdot f_y}{d \cdot E_s} \cdot \left( \frac{m_{sd}}{m_{rd}} \right)^{3/2} \quad (4.4b)$$

As grandezas presentes nas expressões 4.4a e 4.4b representam:

$\psi_1$	é a rotação da laje em torno do pilar, exterior à zona de abertura de fendas de punçoamento, neste caso (sem reforço de armaduras de punçoamento) definido como na expressão 4.4b;
$d_{g0}$	é a dimensão de referência dos agregados do betão (16 mm);
$d_g$	a dimensão máxima dos agregados do betão, tomado como 16 mm;
$u_1$	é o perímetro de controlo de referência a uma distância $0,5 \cdot d$ da face do pilar;
$r_s$	indica a posição radial em que o momento flector é nulo de acordo com o eixo do pilar, aproximadamente $(0,22 \cdot L_x)$ ou $(0,22 \cdot L_y)$ ;
$f_y$	é a tensão média de resistência à tracção do aço, igual a $f_{sy}$ ;
$E_s$	é o módulo de elasticidade do aço;
$m_{sd}$	é o momento flector médio por unidade de comprimento na zona do pilar, para pilares interiores pode aproximar-se a $V/8$ (em que $V$ é a carga de punçoamento);
$m_{rd}$	é o momento flector resistente médio por unidade de comprimento na zona do pilar.

Ao analisar a Tabela 4.12 conclui-se que as cargas de rotura previstas nos modelos numéricos resultaram numa boa aproximação quando comparadas com as experimentais, sobretudo com o previsto pelo EC2 [22], tendo sido ligeiramente sobrestimadas, na

## Capítulo 4. Calibração do Modelo Numérico

**Tabela 4.12:** Comparação das cargas experimentais, numéricas e previstas nas normas.

Modelo	$V_{Rm,EXP}$ KN	$V_{Rm,EC2}$ KN	$V_{Rm,MC2010}$ KN	$V_{Rm,MEF}$ KN	$\frac{V_{Rm,EXP}}{V_{Rm,MEF}}$ -	$\frac{V_{Rm,EC2}}{V_{Rm,MEF}}$ -	$\frac{V_{Rm,MC2010}}{V_{Rm,MEF}}$ -
<b>AR2</b>	258	268.4	221.1	271.1	0.95	0.99	0.82
<b>AR9</b>	251	263.7	215.5	257.0	0.98	1.03	0.84
<b>DF1</b>	191	202	156	206.4	0.93	0.98	0.76
<b>DF4</b>	199	217	180.1	239.2	0.83	0.91	0.75
<b>ID1</b>	269	270.9	222.4	311.1	0.86	0.87	0.71
<b>PG11</b>	763.3	784.6	683.7	774.1	0.99	1.01	0.88
<b>PG19</b>	860	882.7	757.9	832.5	1.03	1.06	0.91
<b>PG20</b>	1094	1111.8	999.6	1167.1	0.94	0.95	0.86
<b>PG2-b</b>	438.7	590	435.3	446.4	0.98	1.32	0.98
<b>PG5</b>	550	585	461.7	536.0	1.03	1.09	0.86
<b>PG3</b>	2153	2347.6	1716.9	2250.1	0.96	1.04	0.76
<b>ND65-1-1</b>	2050	1966.8	1910.7	2021.1	1.01	0.97	0.95
<b>P200</b>	904	763	841	921.0	0.98	0.83	0.91
<b>Média</b>					0.96	1.00	0.85
<b>COV</b>					0.06	0.12	0.10
<b>Média</b> Mamede et al[34]					0.96	1.01	0.85
<b>COV</b> Mamede et al[34]					0.05	0.13	0.08

maioria dos modelos. A média da relação entre  $V_{Rm,EXP}/V_{Rm,MEF}$  foi de 0.96 com um coeficiente de variação (COV) de 0.06. A previsão do EC2 [22] para o punçoamento está de acordo com os resultados numéricos, resultando a média da razão  $V_{Rm,EC2}/V_{Rm,MEF}$  em 1.00 com um COV de 0.12. Quanto ao MC2010 [12] as cargas de rotura previstas foram subestimadas, no qual resultou uma relação média  $V_{Rm,MC2010}/V_{Rm,MEF}$  em 0.85 com COV de 0.10.

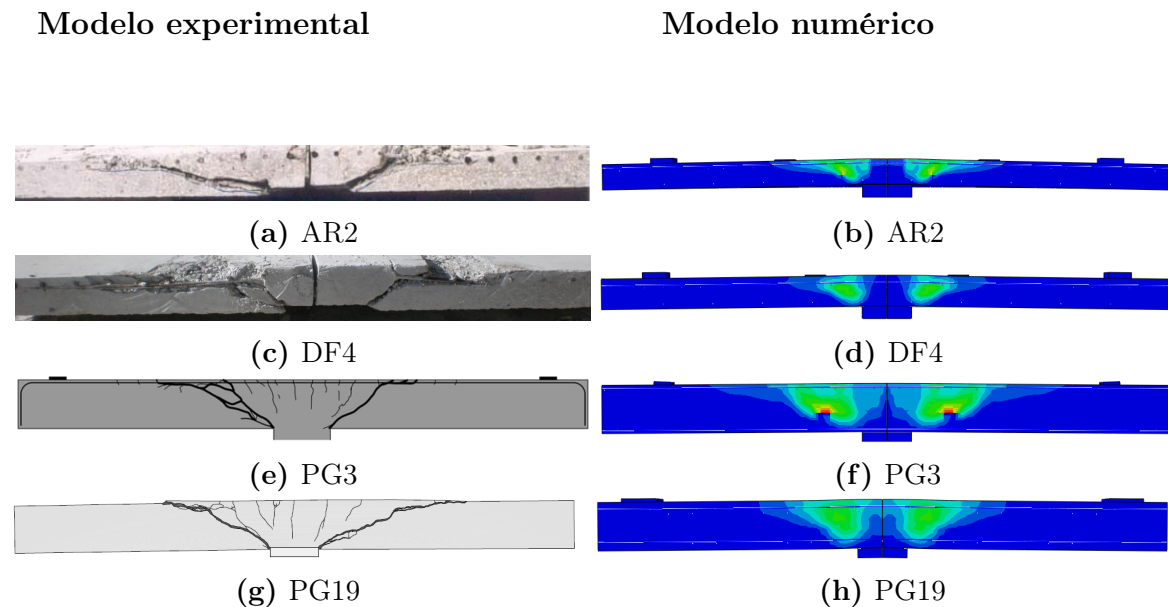
Ao comparar os resultados numéricos de Abaqus com os obtidos por Mamede et al [34], com o programa Atena 3D, verifica-se boa aproximação entre elas. As médias dos rácios  $V_{Rm,EXP}$ ,  $V_{Rm,EC2}$  e  $V_{Rm,MC2010}$ , respetivamente com os  $V_{Rm,MEF}$  no *software* Abaqus é de 0.96, 1.00 e 0.85 para COV de 0.06, 0.12 e 0.10 e em Atena 3D as médias foram 0.96, 1.01 e .85 e COV de 0.05, 0.13 e 0.08. Foi determinada o rácio da carga de rotura obtido Mamede em Atena 3D com as carga obtida com o Abaqus ( $V_{MEF,Atena-M.}/V_{MEF,Abaqus}$ ), e valor médio é de 1.00 com COV de 0.06, o que justifica a boa aproximação.

Analisando os dados em relação aos resultados da tese de Mamede [33], para as lajes AR, DF e ID1, o erro médio dos modelos numéricos obtido aqui é superior. O autor, obteve para as referidas lajes erros médios de 6.3% 4.9% e 20.0% em relação, respetivamente, a  $V_{Rm,EXP}$ ,  $V_{Rm,EC2}$  e  $V_{Rm,MC2010}$ . Com o Abaqus obteve-se erro médios de 9%, 4.5% e 22.4% em relação, respetivamente, a  $V_{Rm,EXP}$ ,  $V_{Rm,EC2}$  e  $V_{Rm,MC2010}$ .

### 4.3.5 Modo de rotura

A apresentação relativa a modo de rotura incide-se sobre apenas quatro modelos de entre os considerados na calibração. Os modelos que se apresentam nas figuras seguintes são os espécimes cujas características destacam das outras. Essas características são nomeadamente, a esbelteza (modelo AR2 de baixa espessura), a percentagem de armadura (lajes PG3 e PG19) e por último a classe de resistência do betão (verificado o maior valor no ensaio DF4).

Na Figura 4.12, apresenta a comparação dos modos de rotura entre os modelos experimentais e os numéricos, onde verifica aproximação considerada satisfatória.

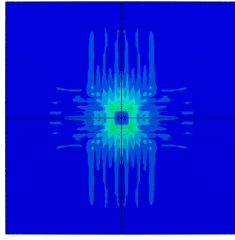


**Figura 4.12:** Comparação modo de rotura experimental vs numérico.

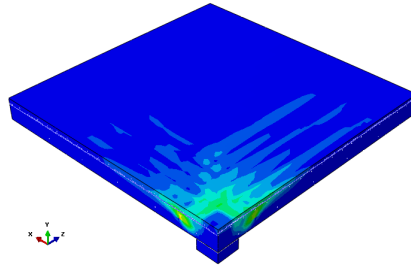
A análise dos deslocamentos verticais (secção 4.3.1), não evidenciou de modo acentuado o efeito causado pela diferença de altura útil. No entanto, ao realizar a análise de modo de rotura, observa-se facilmente esse efeito, conforme se ilustram nas Figura 4.13, 4.14 e 4.15. Na Figura 4.13 ilustram a rotura no topo da laje e num quarto do mesmo na região circundante ao pilar, onde observam-se nestas figuras os cones de punção formados no instante da carga última. Por fim, nas Figuras 4.14 e 4.15 apresentam a evolução da extensão plástica, para diversos níveis de carregamento dos modelos AR2 e PG3, em duas faces ortogonais (direção X e Z) sobre os eixos de simetria.

Modelo AR2

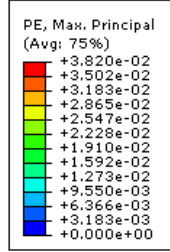
Escala



(a) AR2

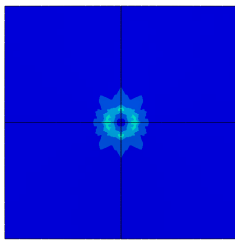


(b) AR2

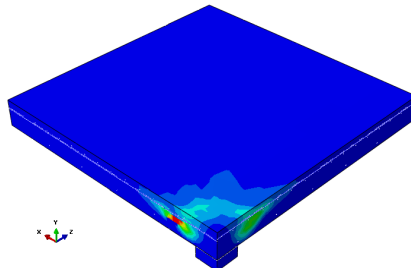


Modelo DF4

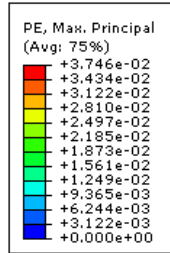
Escala



(c) DF4

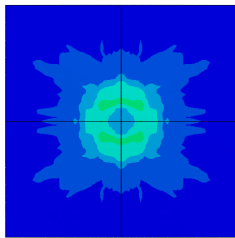


(d) DF4

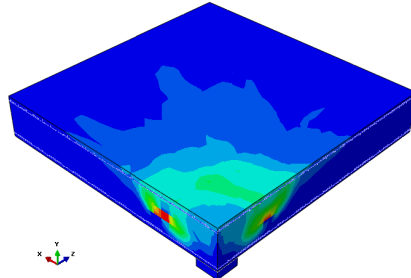


Modelo PG3

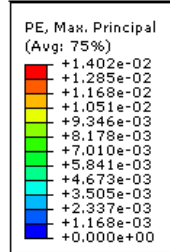
Escala



(e) PG3

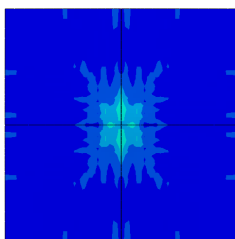


(f) PG3

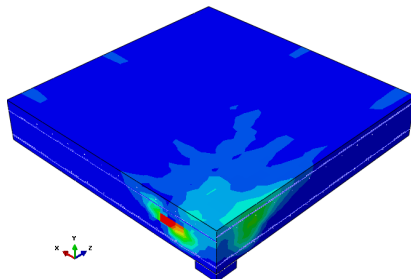


Modelo PG19

Escala



(g) PG19



(h) PG19

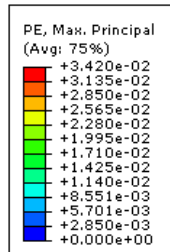
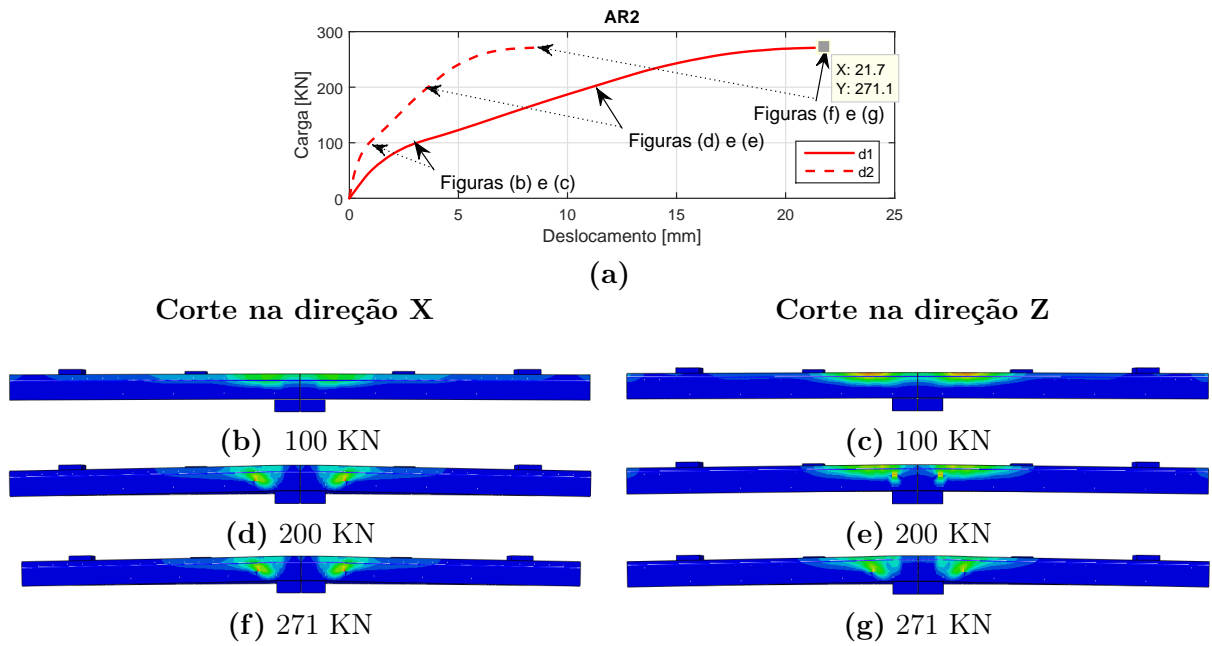
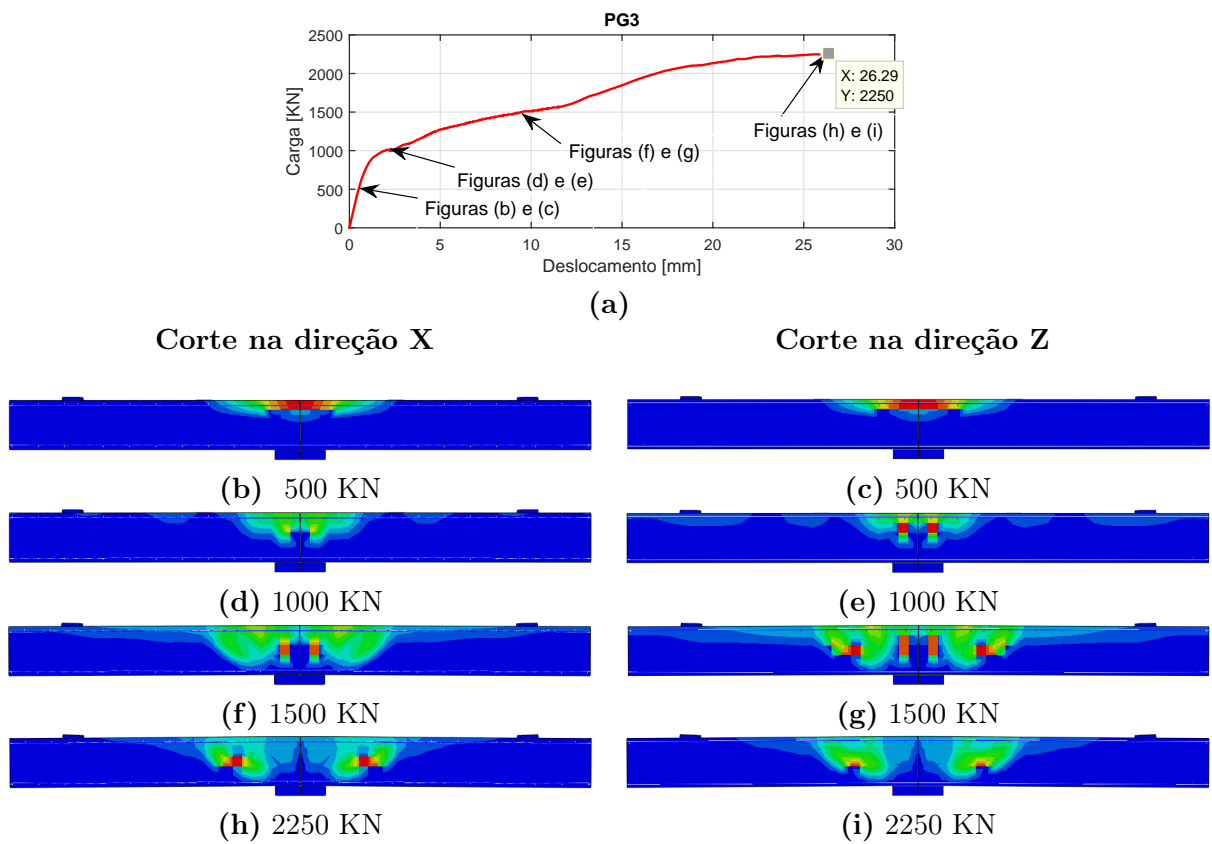


Figura 4.13: Modo de rotura dos modelos AR2, DF4, PG3 e PG19.



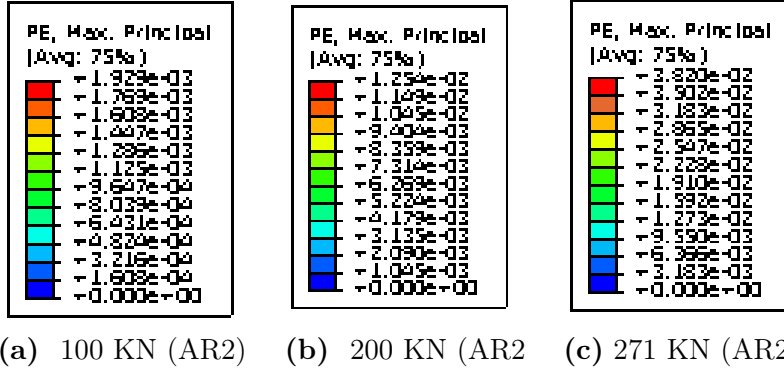


**Figura 4.14:** Ilustração da evolução da extensão plástica (PE) no modelo AR2.

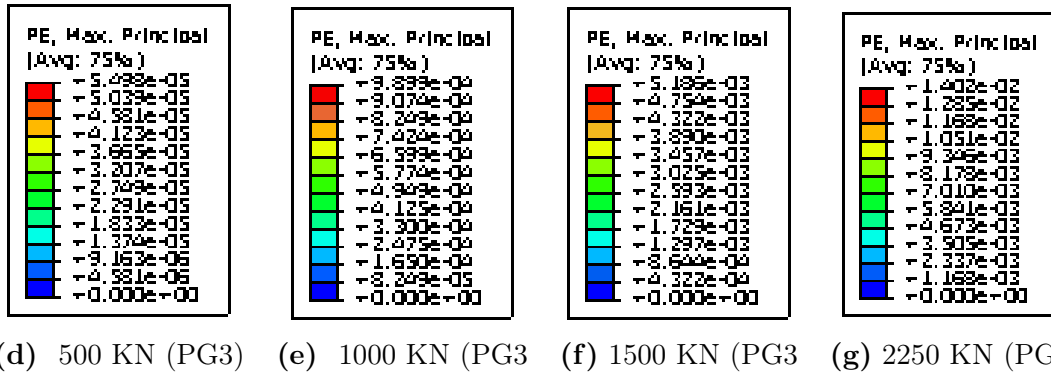


**Figura 4.15:** Ilustração da evolução da extensão plástica (PE) no modelo PG3.

Escalas da Figura 4.14



Escalas da Figura 4.15



**Figura 4.16:** Escalas das Figuras 4.14 e 4.15. (a), (b) e (c) escalas da Figura 4.14; (d), (e), (f) e (g) escalas da Figura 4.15.

# Capítulo 5

## Análise Paramétrica

### 5.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se o estudo paramétrico do punçoamento em lajes fungiformes, através de análise numérica, com base no programa de elementos finitos de análise não linear, Abaqus.

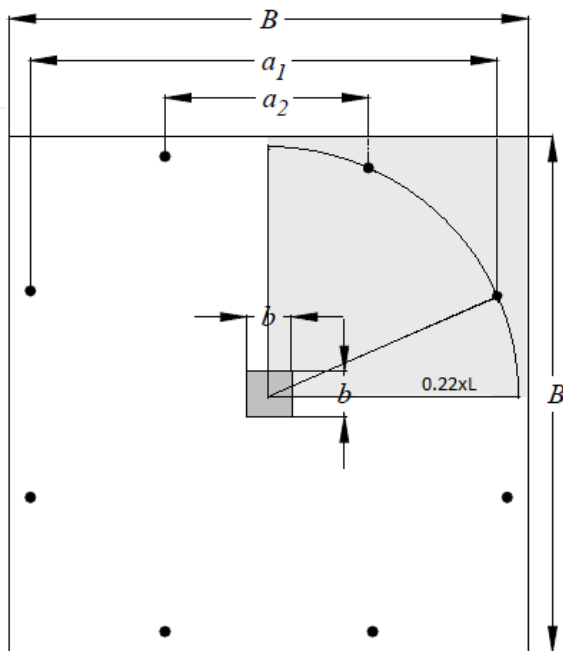
Para esta dissertação foram concebidos 72 modelos numéricos de lajes fungiformes (secção quadrangular) maciça de pilar (quadrangular) ao centro. Pretende-se avaliar a influência de quatro parâmetros, sendo eles: espessura da laje ( $h$ ), a dimensão do pilar ( $b$ ), a percentagem de armadura longitudinal ( $\rho$ ) e o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão ( $f_{cm}$ ). A variação destes parâmetros foi realizada de modo a obter o seguinte: 3 conjuntos de modelos com espessuras de 200, 250 e 300 mm; 2 conjuntos com secção de pilar de valores de 200 e 400 mm; 4 com valores da percentagem de armadura correspondente a 0.50%, 1.00%, 1.50% e 2.00%; e 3 conjuntos com os valores médios da tensão de rotura do betão à compressão entre 25, 35 e 45 em MPa. Para facilitar a identificação destes modelos adotou-se a seguinte terminologia  $M\_h\_b\_ \rho\_ f_{cm}$ , onde as notações  $M$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $\rho$ , e  $f_{cm}$  significam-respetivamente, modelo, a espessura da laje, a dimensão do pilar, a percentagem de armadura longitudinal e o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão.

A avaliação dos modelos numéricos é efetuada em termos da leitura das cargas de rotura e dos deslocamentos verticais. Os resultados são analisados qualitativamente em termos estatísticos em relação às previsões do EC2 [22], MC2010 [12] e os resultados obtidos por Mamede [33]. Relativamente às rotações procede-se à análise com base nos estudos de Muttoni [36] e o MC2010 [12]. Também se analisa a proposta apresentada por Mamede [33] em relação à alteração da expressão de previsão da resistência ao punçoamento do EC2.

## 5.2 Modelos numéricos

Os modelos numéricos são constituídos pelos elementos apresentados na Figura 5.1, a laje, o pilar e a placa metálica de aplicação de carga. As notações na referida figura indicam a dimensão da laje ( $B$ ), do pilar ( $b$ ) e da localização de aplicação da carga ( $a_1$  e  $a_2$ ) nos modelos. Os valores destas dimensões estão apresentados na Tabela 5.1 para todos os modelos desenvolvidos neste estudo. Estas foram calculadas pelas expressões presentes na mesma tabela em função da espessura da laje ( $h$ ) através da relação  $L = 30 \cdot h$ . As expressões relativas a  $B$ ,  $a_1$  e  $a_2$  presentes na referida tabela, são aproximações da zona de momento nulo a uma distância do centro da laje, determinada pela relação  $0.22 \cdot L$ . A constante 0.13636 presente na expressão de  $B$ , é o acréscimo introduzido nessa grandeza, a fim de ter em conta a introdução da placa de aplicação de carga, com secção de 200x200 mm<sup>2</sup>.

Foi modelado apenas um quarto da laje (simetria, área sombreada na Figura 5.1), introduzindo apoios deslizantes. As cargas foram aplicadas através dos deslocamentos considerados na direção perpendicular ao plano da laje no centro das placas metálicas, com restrição única dos deslocamentos no plano horizontal. Nos pilares foi restringindo o deslocamento na direção do carregamento. A malha dos elementos finitos considerada foi com cinco camadas na espessura da laje e maior refinamento junto ao pilar (conforme descrito na secção 4.2.1), com elemento finito do tipo C3D8R. A armadura de aço foi simulada com o elemento *truss*, T2D3, com dimensão de um quinto da espessura da laje.



$L = 30 \cdot h$ $B/2 = 0.22 \cdot L \cdot (1 + 0.13636)$ $a_1/2 = 0.22 \cdot L \cdot \cos(22.5^\circ)$ $a_2/2 = 0.22 \cdot L \cdot \sin(22.5^\circ)$					
$h$	$d$	$B/2$	$b$	$a_1/2$	$a_2/2$
<b>200</b>	165	1500	200	1220	505
<b>250</b>	210	1875	200	1524	631
<b>300</b>	260	2250	200	1829	758
<b>200</b>	165	1500	400	1220	505
<b>250</b>	210	1875	400	1524	631
<b>300</b>	260	2250	400	1829	758

**Figura 5.1:** Modelo da laje. Adaptado Guandalini [14]

**Tabela 5.1:** Características dos modelos, em mm.

### 5.2.1 Materiais

A Tabela 5.2 apresenta os parâmetros dos materiais do betão (à esquerda) e aço (à direita) utilizados na análise paramétrica. As características do betão: a tensão à tração do betão,  $f_{ctm}$ , módulo de elasticidade do betão,  $E_{cm}$ , e a energia de fratura,  $G_f$ , foram determinadas de acordo com as expressões presentes na Tabela 4.2, do capítulo anterior.

As armaduras foram determinadas segundo as expressões 5.1 e 5.2, respetivamente, superior ( $A_s$ ) e inferior ( $A_{s,min}$ ). No cálculo da armadura superior contempla a percentagem da armadura (um dos parâmetros em análise). A armadura inferior foi assumida igual à mínima de acordo com o recomendado pelo EC2 [22]. A modelação dos varões da armadura longitudinal efetuou-se recorrendo a elementos truss, T2D3, armadura discreta, assumindo que o material apresenta o comportamento bilinear (com plastificação perfeita). O valor característico da tensão de cedência do aço,  $f_{yk}$ , adotada para os varões longitudinais foi de 500 MPa.

$$A_s = \frac{\rho}{100} b_t \cdot d \quad (5.1)$$

$$A_{s,min} = 0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_t \cdot d \geq 0,0013 \cdot b_t \cdot d \quad (5.2)$$

Nestas expressões, os parâmetros  $\rho$  é a percentagem de armadura e  $b_t$  corresponde à largura média da zona tracionada.

A armadura longitudinal superior foi definida consoante a área de aço correspondente à percentagem de armadura,  $\rho$ , de cada modelo segundo a expressão 5.1. O varão sobre o eixo de simetria foi simulado com metade da área. Na Tabela 5.2 apresentam-se as áreas de armadura longitudinal superior dos diferentes modelos. Adotou-se o espaçamento da armadura longitudinal inferior igual a 20 cm, sabendo que o varão mais próximo do eixo de simetria encontra-se a 10 cm de distância.

**Tabela 5.2:** Características do betão e áreas da armadura longitudinal.

$f_{cm}$	$f_{ctm}$	$E_{cm}$	$G_f$	$h$	$\rho$ (%)			
					0.5	1.0	1.5	2
MPa	MPa	MPa	Nm/m <sup>2</sup>	mm	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>
<b>25.0</b>	1.98	26064	56.97	200	82.5	165.0	247.5	330.0
<b>35.0</b>	2.70	28833	72.11	250	105.0	210.0	315.0	420.0
<b>45.0</b>	3.33	31091	85.97	300	130.0	260.0	390.0	520.0

### 5.2.2 Pontos de monitorização

Nos modelos, foram monitorizados apenas dois pontos, um para leitura das cargas e outro para a leitura dos deslocamentos. A leitura de histórico da carga foi efetuada

no pilar, no ponto em que é restringido o deslocamento vertical. O histórico dos deslocamentos foi obtido pela monitorização do ponto no eixo de simetria paralela aos varões de maior altura útil, a uma distancia de  $0.22L$  (zona de momento nulo) do centro da laje.

### 5.3 Análise dos resultados

#### 5.3.1 Relação força-deslocamento dos modelos numéricos

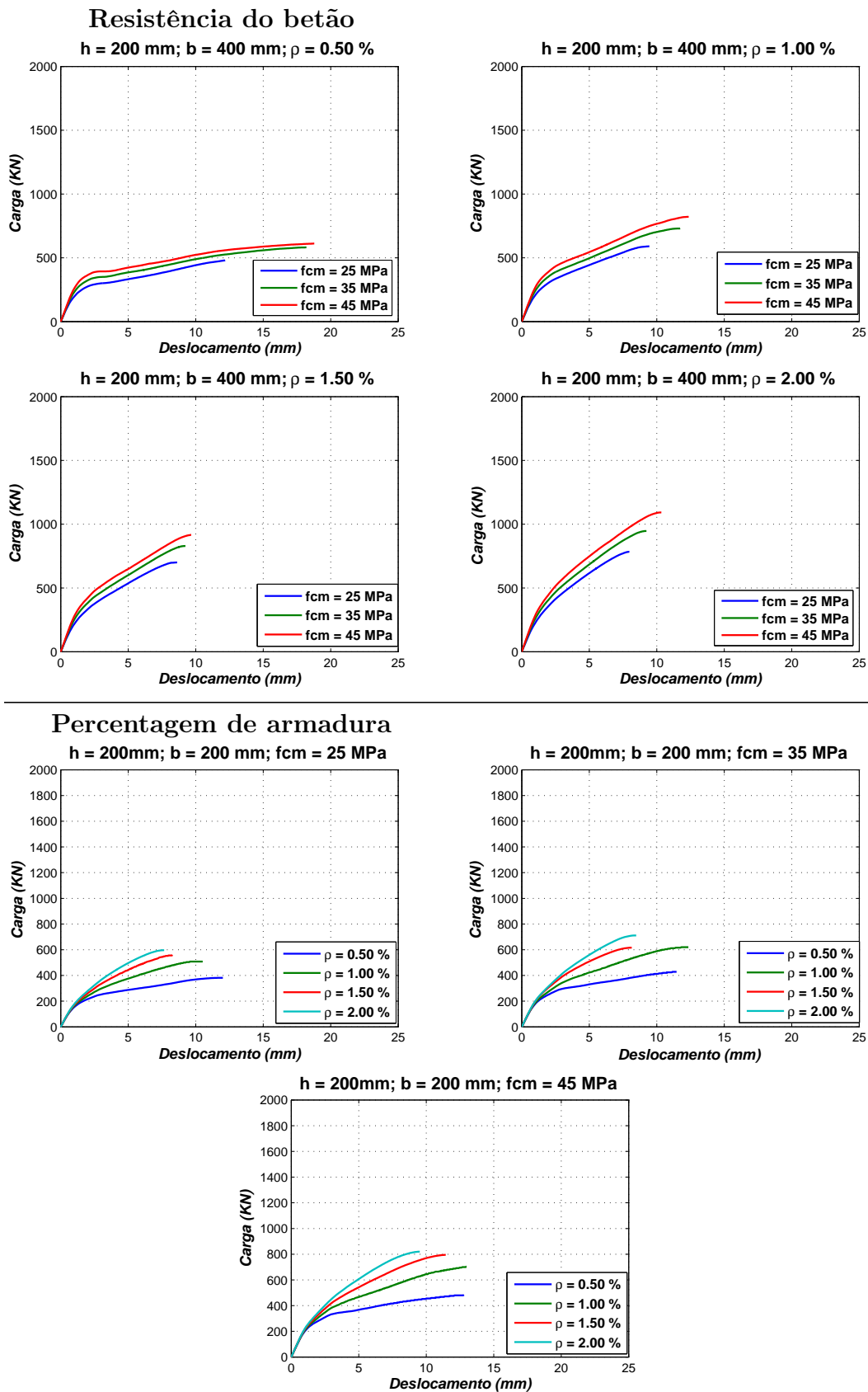
Nesta secção, são apresentados alguns resultados gráficos da relação força deslocamento obtidos no estudo paramétrico. Nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4, ilustram-se, de um modo geral, o comportamento observado na relação força deslocamento quando as variáveis são; a resistência do betão à compressão, a percentagem de armadura, dimensão do pilar e espessura da laje (em função de altura útil média,  $d$ ).

##### 5.3.1.1 Resistência do betão à compressão

Como se observa na Figura 5.2, nos quatro primeiros gráficos, o aumento da resistência do betão nos modelos numéricos apresentam um aumento da resistência ao punçãoamento, e aumenta, também, a fase elástica, retardando a formação de fendas. Com o aumento da resistência do betão, os deslocamentos últimos atingidos são superiores. Após a primeira fenda abrir as respostas dos modelos tendem a ser semelhantes.

##### 5.3.1.2 Percentagem de armadura longitudinal

A variação da percentagem da armadura longitudinal influencia significativamente o comportamento das lajes, conforme ilustrado na Figura 5.2 (três últimos gráficos). O aumento deste parâmetro nos modelos conduz à redução da ductilidade neste elemento estrutural, e também ao aumento da capacidade resistente ao punçãoamento. Este comportamento deve-se ao aumento da rigidez após a fendilhação, que resulta nos modos de rotura sucessivamente mais frágeis.



**Figura 5.2:** Influência da resistência do betão e percentagem de armadura na resistência ao punção e o seu comportamento.

### 5.3.1.3 Secção do pilar

Ao analisar os gráficos da Figura 5.3, verifica-se que o aumento da secção do pilar aumenta também a previsão da resistência ao punçoamento. Observa-se, que a evolução dos deslocamentos apresenta algumas diferenças quando se varia a dimensão dos pilares. Essas diferenças verificam-se após a ocorrência da fendilhação, com maior evidência em relação aos deslocamentos últimos. Este comportamento é observado de modo acentuado nos modelos com baixa percentagem de armadura (0.5 %).

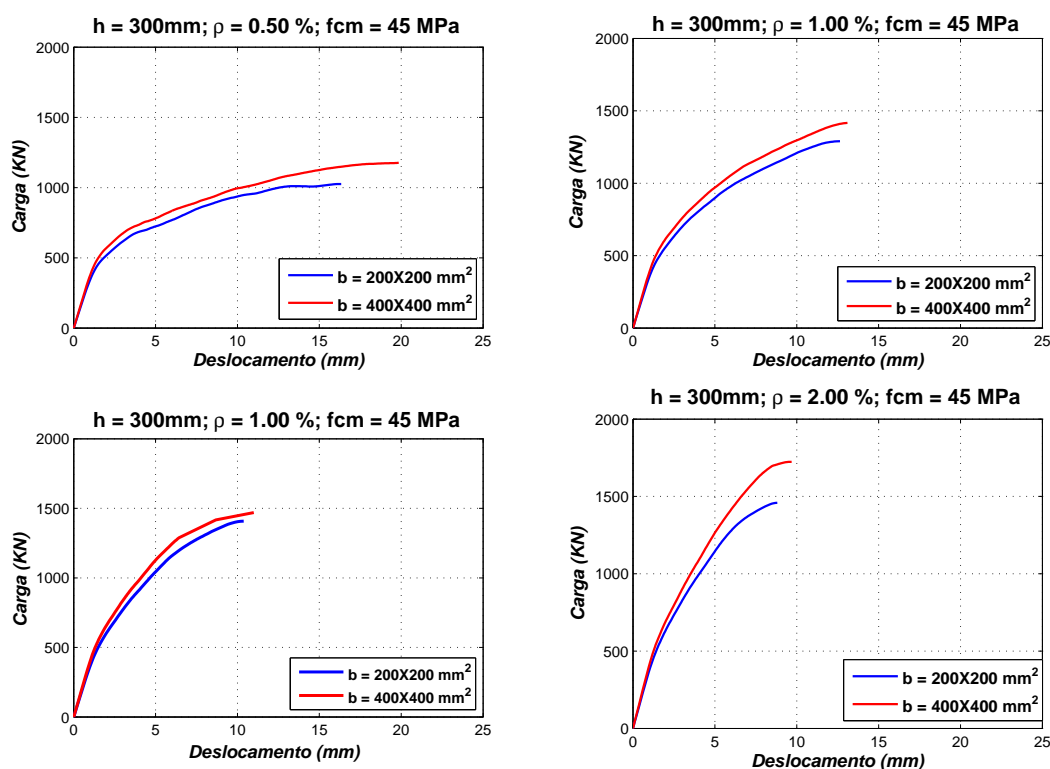


Figura 5.3: Influência da secção do pilar no comportamento ao punçoamento.

### 5.3.1.4 Altura útil

A altura útil média foi definida segundo a espessura dos modelos e o posicionamento da armadura longitudinal. O aumento deste parâmetro aumenta a resistência ao punçoamento. Da observação dos gráficos da Figura 5.4, constata-se que com o aumento deste parâmetro, o início da fendilhação é retardado pelo prolongamento da fase elástica para níveis de cargas superiores. Verifica-se também, um ligeiro aumento da rigidez. Em relação aos deslocamentos finais, estes não apresentam variações significativas, isto é, a variação da espessura da laje não afeta significativamente os deslocamentos finais.



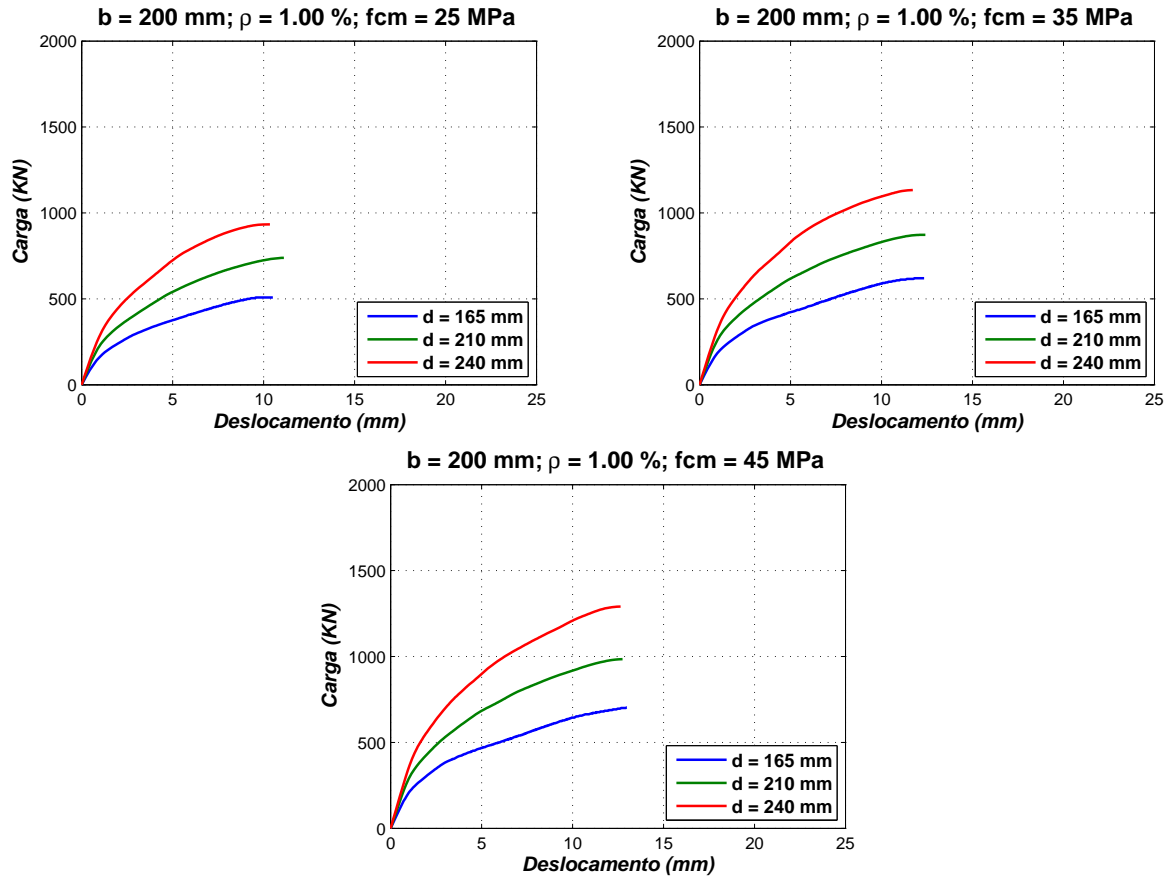


Figura 5.4: Influência da altura útil no comportamento ao punçoamento.

### 5.3.2 Cargas de rotura ao punçoamento dos modelos numéricos

Nas Tabelas 5.3 e 5.4, apresentam-se os valores das cargas de rotura ao punçoamento obtidas dos modelos numéricos,  $V_{Rm,MEF}$ , e os previsto pelas normas, o EC2 [22],  $V_{Rm,EC2}$ , e o MC2010 [12] (para previsão de nível II),  $V_{Rm,MC2010}$ , e também a relação entre as cargas dos modelos numéricos com os das normas. Os valores obtidos pela previsão das normas foram determinados de acordo com as expressões 4.3 e 4.4a do capítulo 4, para EC2 e para o Model Code 2010, respectivamente.

Na Tabela 5.5 é realizada uma comparação qualitativa em termos estatísticos com os resultados obtidos por Mamede [33]

## Capítulo 5. Análise Paramétrica

**Tabela 5.3:** Cargas de rotura para  $h = [200, 250]$  mm,  $b = [200, 400]$  mm.

<i>Modelo</i>	$V_{Rm,MEF}$ KN	$V_{Rm,EC2}$ KN	$\frac{V_{Rm,MEF}}{V_{Rm,EC2}}$ -	$V_{Rm,MC2010}$ KN	$\frac{V_{Rm,MEF}}{V_{Rm,MC2010}}$ -
$M_{200\_200\_050\_25}$	381.2	416.12	0.92	353.2	1.08
$M_{200\_200\_050\_35}$	436.0	465.51	0.94	389.1	1.12
$M_{200\_200\_050\_45}$	484.0	506.18	0.96	417.2	1.16
$M_{200\_200\_100\_25}$	508.0	524.27	0.97	464.4	1.09
$M_{200\_200\_100\_35}$	620.0	586.50	1.06	520.1	1.19
$M_{200\_200\_100\_45}$	704.0	637.75	1.10	563.7	1.25
$M_{200\_200\_150\_25}$	560.0	600.14	0.93	528.2	1.06
$M_{200\_200\_150\_35}$	616.3	671.38	0.92	599.1	1.03
$M_{200\_200\_150\_45}$	794.7	730.04	1.09	654.9	1.21
$M_{200\_200\_200\_25}$	596.4	660.54	0.90	569.2	1.05
$M_{200\_200\_200\_35}$	711.4	738.94	0.96	652.4	1.09
$M_{200\_200\_200\_45}$	819.8	803.51	1.02	718.1	1.14
$M_{200\_400\_050\_25}$	498.9	531.97	0.94	452.4	1.10
$M_{200\_400\_050\_35}$	581.9	595.11	0.98	495.7	1.17
$M_{200\_400\_050\_45}$	614.7	647.11	0.95	529.5	1.16
$M_{200\_400\_100\_25}$	589.9	670.24	0.88	611.5	0.96
$M_{200\_400\_100\_35}$	730.0	749.79	0.97	680.2	1.07
$M_{200\_400\_100\_45}$	821.4	815.31	1.01	733.5	1.12
$M_{200\_400\_150\_25}$	700.3	767.23	0.91	709.5	0.99
$M_{200\_400\_150\_35}$	829.1	858.29	0.97	799.0	1.04
$M_{200\_400\_150\_45}$	916.0	933.29	0.98	868.5	1.05
$M_{200\_400\_200\_25}$	784.1	844.45	0.93	775.8	1.01
$M_{200\_400\_200\_35}$	946.7	944.67	1.00	883.5	1.07
$M_{200\_400\_200\_45}$	1092.2	1027.22	1.06	966.8	1.13
$M_{250\_200\_050\_25}$	636.5	596.10	1.07	495.6	1.28
$M_{250\_200\_050\_35}$	695.8	666.85	1.04	545.9	1.27
$M_{250\_200\_050\_45}$	740.4	725.12	1.02	585.2	1.27
$M_{250\_200\_100\_25}$	738.9	751.04	0.98	651.9	1.13
$M_{250\_200\_100\_35}$	872.6	840.18	1.04	730.1	1.20
$M_{250\_200\_100\_45}$	984.7	913.59	1.08	791.2	1.24
$M_{250\_200\_150\_25}$	753.0	859.72	0.88	741.9	1.02
$M_{250\_200\_150\_35}$	914.7	961.76	0.95	841.4	1.09
$M_{250\_200\_150\_45}$	1057.5	1045.80	1.01	919.6	1.15
$M_{250\_200\_200\_25}$	801.0	946.25	0.85	799.7	1.00
$M_{250\_200\_200\_35}$	985.3	1058.56	0.93	916.6	1.08
$M_{250\_200\_200\_45}$	1095.8	1151.05	0.95	1008.6	1.09

### 5.3. Análise dos resultados

**Tabela 5.4:** Cargas de rotura para  $h = [250, 300]$  mm,  $b = [200, 400]$  mm.

<i>Modelo</i>	$V_{Rm,MEF}$ KN	$V_{Rm,EC2}$ KN	$\frac{V_{Rm,MEF}}{V_{Rm,EC2}}$ -	$V_{Rm,MC2010}$ KN	$\frac{V_{Rm,MEF}}{V_{Rm,MC2010}}$ -
$M_{250\_400\_050\_25}$	766.0	734.77	1.04	622.7	1.23
$M_{250\_400\_050\_35}$	834.2	821.98	1.01	682.5	1.22
$M_{250\_400\_050\_45}$	888.3	893.80	0.99	729.2	1.22
$M_{250\_400\_100\_25}$	1058.6	925.75	1.14	840.5	1.26
$M_{250\_400\_100\_35}$	1239.8	1035.63	1.20	935.3	1.33
$M_{250\_400\_100\_45}$	1250.5	1126.12	1.11	1008.8	1.24
$M_{250\_400\_150\_25}$	1047.4	1059.72	0.99	974.1	1.08
$M_{250\_400\_150\_35}$	1178.5	1185.50	0.99	1097.6	1.07
$M_{250\_400\_150\_45}$	1389.8	1289.09	1.08	1193.3	1.16
$M_{250\_400\_200\_25}$	1071.0	1166.37	0.92	1064.5	1.01
$M_{250\_400\_200\_35}$	1329.7	1304.81	1.02	1212.6	1.10
$M_{250\_400\_200\_45}$	1586.8	1418.82	1.12	1327.4	1.20
$M_{300\_200\_050\_25}$	688.2	829.20	0.83	676.5	1.02
$M_{300\_200\_050\_35}$	940.7	927.62	1.01	745.0	1.26
$M_{300\_200\_050\_45}$	1010.3	1008.68	1.00	798.6	1.27
$M_{300\_200\_100\_25}$	923.2	1044.73	0.88	890.5	1.04
$M_{300\_200\_100\_35}$	1132.8	1168.73	0.97	997.0	1.14
$M_{300\_200\_100\_45}$	1290.4	1270.85	1.02	1080.3	1.19
$M_{300\_200\_150\_25}$	1020.0	1195.92	0.85	1013.8	1.01
$M_{300\_200\_150\_35}$	1229.1	1337.86	0.92	1149.6	1.07
$M_{300\_200\_150\_45}$	1407.8	1454.77	0.97	1256.2	1.12
$M_{300\_200\_200\_25}$	1043.4	1316.28	0.79	1093.2	0.95
$M_{300\_200\_200\_35}$	1266.8	1472.51	0.86	1252.7	1.01
$M_{300\_200\_200\_45}$	1458.9	1601.18	0.91	1378.4	1.06
$M_{300\_400\_050\_25}$	964.2	992.30	0.97	834.6	1.16
$M_{300\_400\_050\_35}$	1047.6	1110.08	0.94	914.7	1.15
$M_{300\_400\_050\_45}$	1176.7	1207.08	0.97	977.4	1.20
$M_{300\_400\_100\_25}$	999.5	1250.22	0.80	1125.2	0.89
$M_{300\_400\_100\_35}$	1102.6	1398.61	0.79	1252.4	0.88
$M_{300\_400\_100\_45}$	1416.5	1520.82	0.93	1351.3	1.05
$M_{300\_400\_150\_25}$	1164.4	1431.15	0.81	1302.9	0.89
$M_{300\_400\_150\_35}$	1406.1	1601.01	0.88	1468.5	0.96
$M_{300\_400\_150\_45}$	1416.3	1740.91	0.81	1596.9	0.89
$M_{300\_400\_200\_25}$	1312.4	1575.18	0.83	1422.7	0.92
$M_{300\_400\_200\_35}$	1645.6	1762.14	0.93	1621.1	1.02
$M_{300\_400\_200\_45}$	1723.8	1916.12	0.90	1775.1	0.97

**Tabela 5.5:** Média ( $\mu$ ), desvio padrão ( $\sigma$ ) e coeficiente de variação (COV) da relação dos valores de carga última ao punçoamento dos modelos numéricos com os previstos pelas normas

	$\mu$	$\sigma$	COV
$V_{Rm,MEF}/V_{Rm,EC2}$	0.96	0.086	0.090
$V_{Rm,MEF}/V_{Rm,EC2}$ (Mamede [33])	1.03	0.081	0.078
$V_{Rm,MEF}/V_{Rm,MC2010}$	1.10	0.107	0.097
$V_{Rm,MEF}/V_{Rm,MC2010}$ (Mamede [33])	1.14	0.090	0.079

Observa-se nas Tabelas 5.3 e 5.4 que a variação crescente dos parâmetros no estudo evidencia, o aumento dos valores da carga de rotura por punçoamento. Entretanto, o aumento observado não é verificado de modo proporcional.

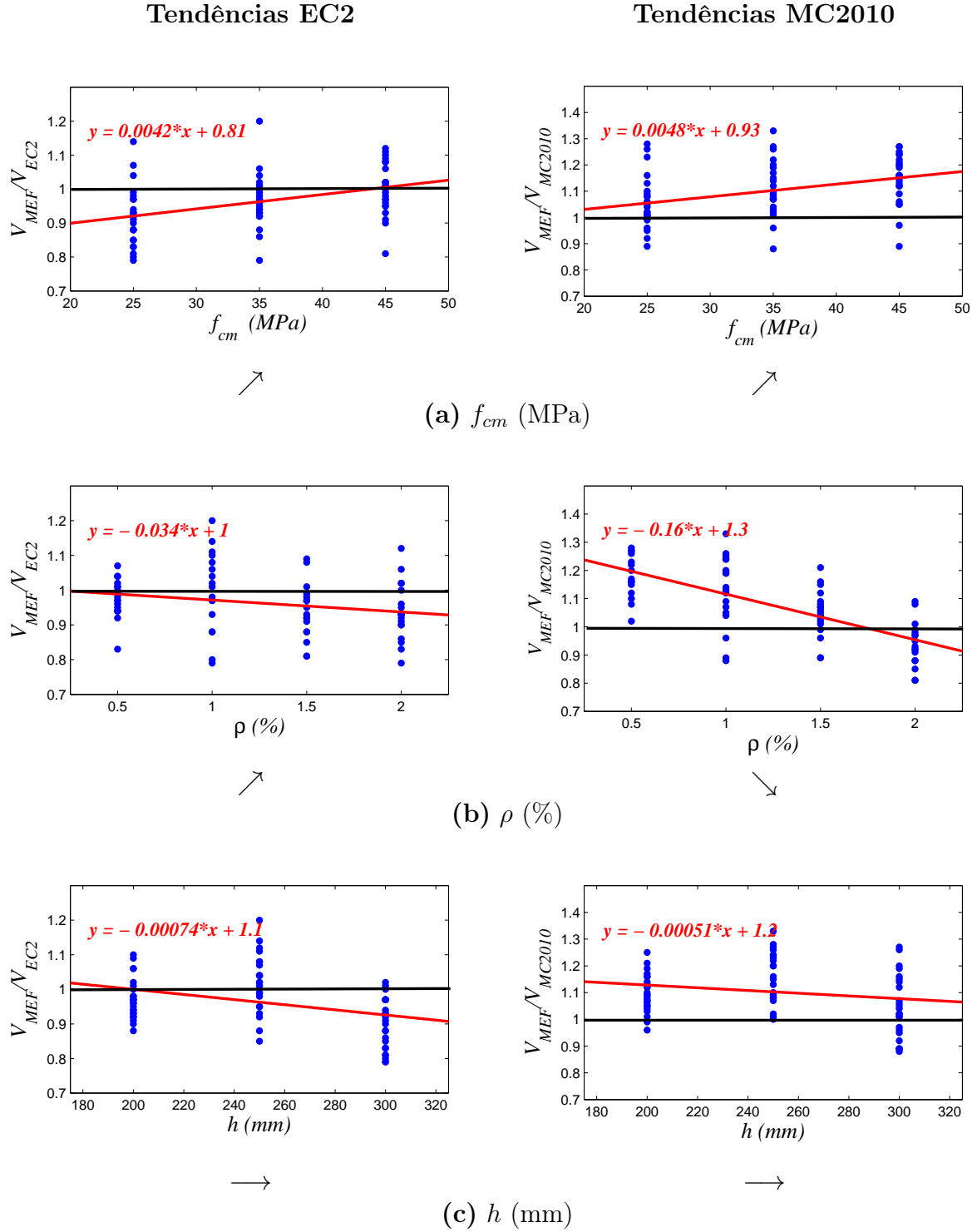
Ao comparar os resultados das médias dos rácios das cargas de rotura dos modelos numéricos com os de normas EC2 e o MC2010, Tabela 5.5, verifica-se um valor médio melhor para a previsão do EC2, com média de 0.96 (erro médio de 4%). A mesma análise quando é aplicada ao estudo de de Mamede [33], verifica-se que o mesmo obteve melhor média associada ao EC2, com valor de 1.03 (erro médio de 3%). Relativamente ao MC2010, com base na análise estatística, obteve-se a média dos rácios de valor 1.10 (erro médio de 10%). Noutro estudo, foi obtido para a mesma análise a média dos rácios com valor de 1.14 (erro médio de 14%). Nesta comparação, conclui-se que houve melhor aproximação para os resultados deste estudo.

### 5.3.2.1 Análise da tendência da relação carga de rotura, MEF, EC2 e MC2010

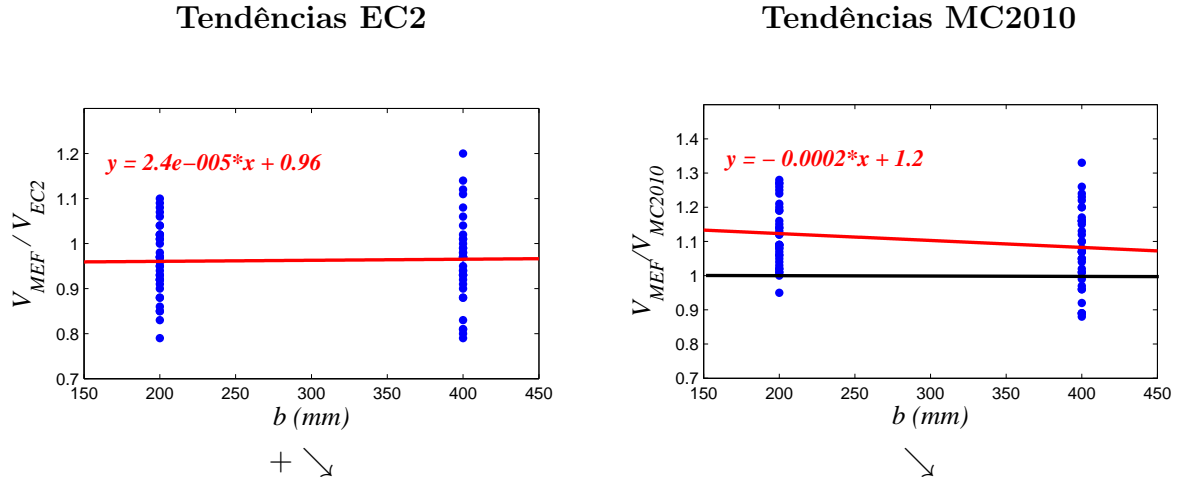
Nas Figuras 5.5 e 5.6, ilustram-se graficamente as relações das cargas de rotura dos modelos numéricos com as previstas pelo EC2 e pela recomendação MC2010, dos diferentes parâmetros em estudo: valores da resistência à compressão do betão; da espessura da laje; da percentagem da armadura da laje e a secção do pilar, além da regressão linear para perceção das tendências das variações dos diferentes parâmetros. Um alinhamento horizontal corresponde ao valor considerado ótimo, 1.00.

Ao avaliar as tendências presentes nestes gráficos, apenas um caso se aproxima dos valores igual ao ótimo (alinhamento horizontal), sendo a situação associada à variação da dimensão do pilar ( $b$ ) e em relação ao EC2. Para as restantes situações, observa-se as seguintes tendências dos resultados: abaixo dos valores ótimos (tendência conservativa, um caso); acima dos valores ótimos (tendência não conservativa, três casos); e outras tendências com a transição, de conservativa para não conservativa (um caso) e contrária (dois casos).

A variação crescente da resistência à compressão do betão nos modelos numéricos permite obter cargas de rotura que apresentam uma relação com às previsões do Eurocô-



**Figura 5.5:** Influência dos parâmetros,  $f_{cm}$  (a),  $\rho$  (b) e  $h$  (c), em relação à previsão do EC2 (esquerda) e MC2010 (direita). Os símbolos ↘, ↗ e → indicam as tendências obtidas por Mamede [33].



**Figura 5.6:** Influência do parâmetro,  $b$  (mm), em relação à previsão do EC2 (esquerda) e MC2010 (direita). O símbolo  $\searrow$  é a tendência, e a representação  $+ \searrow$  indica a tendência e a sua transição obtida por Mamede [33].

digo 2 e do *Model Code 2010* de tendências cada vez mais não-conservativas. Contudo, em relação ao EC2 há transição da tendência dos resultados, de conservativos para não conservativos, e neste caso em particular verifica-se número considerável de modelos que apresentam resultados conservativos.

O aumento da percentagem da armadura promove a tendência conservativa nos resultados das cargas relativamente às previstas pelas normas. Observa-se que a tendência dos resultados das cargas de rotura previstas pelo *Model Code 2010* é conservativa para as percentagens de armadura de 0.50%, 1.00% e 1.50%.

Ao variar a dimensão do pilar obtém-se a tendência aproximadamente ótima em relação ao EC2, como referido anteriormente. Porém, relativamente ao MC2010, a tendência é não conservativa.

Com a variação da altura útil, obtém-se tendências com declives negativas em relação as duas normas. No entanto, a tendência referente ao EC2 apresenta uma transição, em que inicialmente é não conservativa. Para os resultados referentes ao MC2010, a tendência das cargas obtidas numericamente é não conservativa.

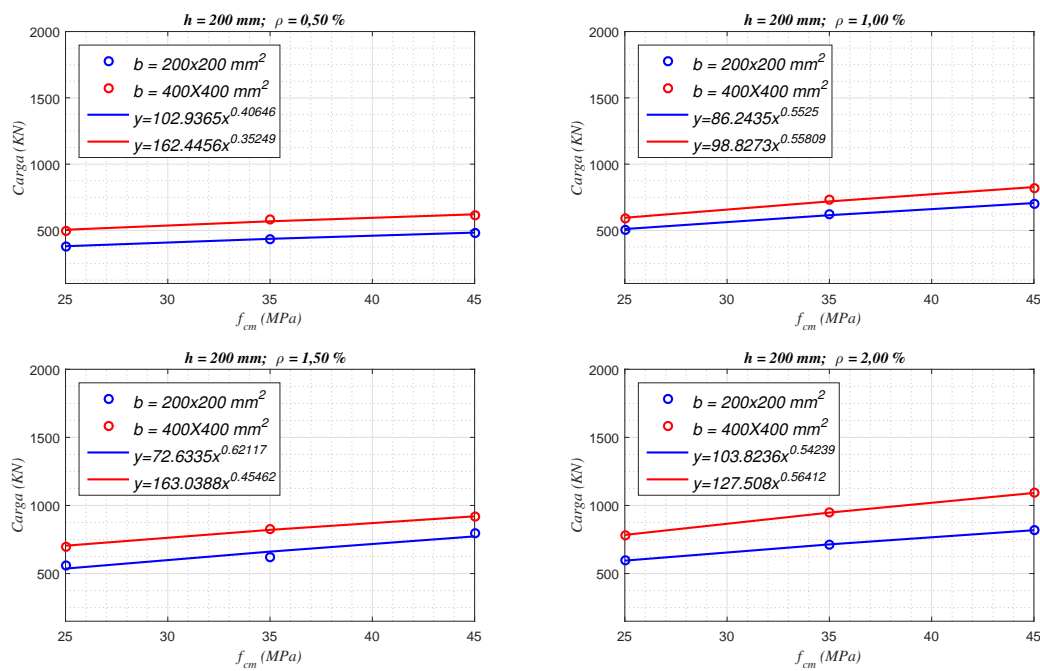
Nestas figuras são apresentados simbologias que ilustram as tendências dos resultados obtidos com o programa Atena 3D, noutro estudo. Ao analisar estas simbologias, verifica-se que naquele estudo foi obtido um resultado ( $\Delta h$ , para o EC2) aproximadamente ótimo. No presente trabalho o resultado ótimo ocorre para análise da secção do pilar em relação ao EC2 ( $\Delta b$ , EC2). Ao comparar as tendências em que houve a transição, verifica-se apenas um caso (de não conservativo para conservativo, na variação de  $b$  e em relação ao EC2) naquele trabalho, e neste estudo ocorreram para três situações, referenciadas anteriormente. Todas as outras tendências, no trabalho de Mamede

encontram-se acima do alinhamento horizontal (ótimo), o que sugere resultados não conservativos apesar das diferenças do declive.

#### 5.3.3 Influência da resistência do betão, $f_{cm}$ , na carga de rotura ao punçoamento

Nas Figura 5.7 e 5.8, apresentam-se graficamente os resultados da influência da resistência do betão dos modelos numéricos. Nestes gráficos, apresentam-se as cargas de rotura ao punçoamento e as linhas de tendências determinadas pela regressão potencial (para diferentes dimensões do pilar) e as correspondentes expressões. Os gráficos ilustrados, encontram-se organizados segundo a espessura das lajes (quatro gráficos), variando entre eles a percentagem da armadura.

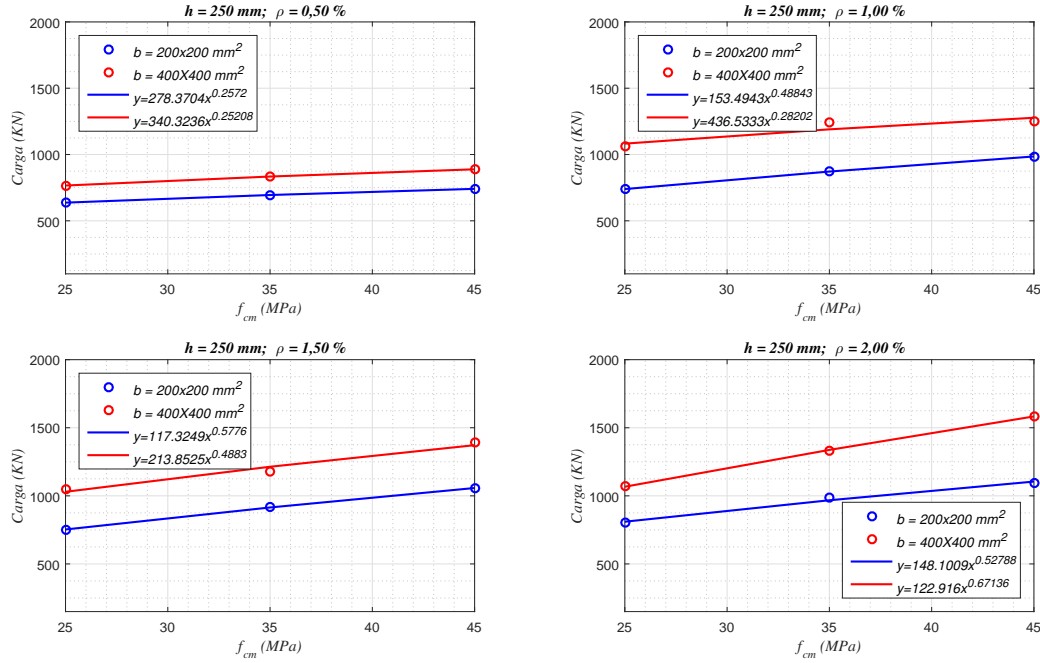
$\Delta f_{cm}$  com  $h = 200$  mm



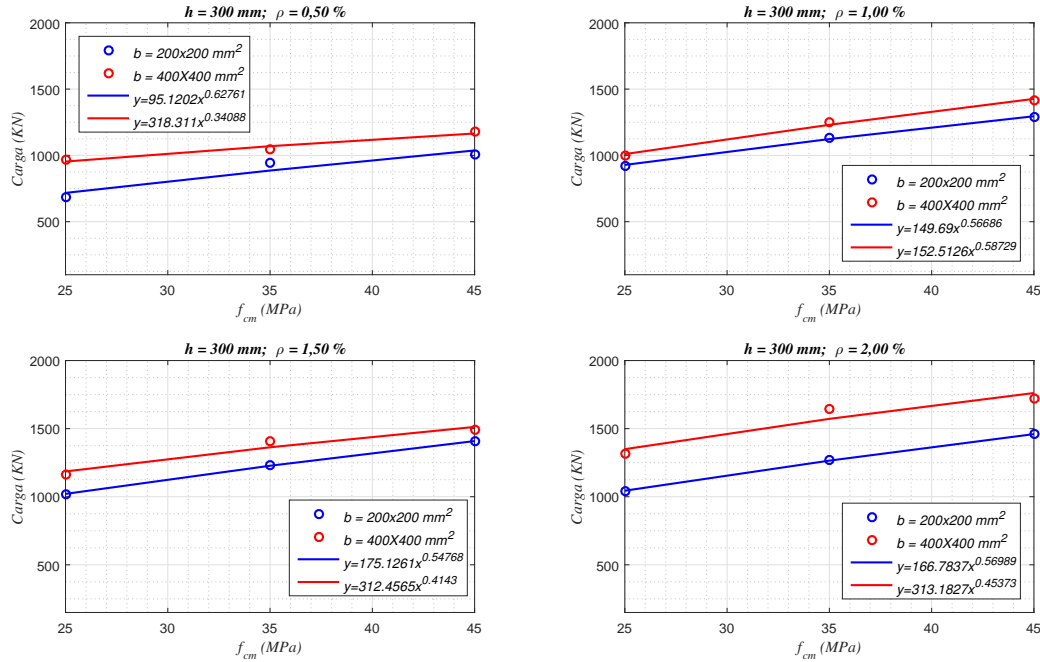
**Figura 5.7:** Evolução das cargas de rotura ao punçoamento com a variação da resistência à compressão de ,  $f_{cm}$ , em que:  $h = 200$  mm,  $\rho = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0]\%$ .

## Capítulo 5. Análise Paramétrica

$\Delta f_{cm}$  com  $h = 250$  mm



$\Delta f_{cm}$  com  $h = 300$  mm



**Figura 5.8:** Evolução das cargas de rotura ao punçoamento com a variação da resistência à compressão de ,  $f_{cm}$ , em que:  $h = [250, 300]$  mm,  $\rho = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0]\%$ .

Com estes resultados, uma vez mais, verifica-se o aumento da carga de rotura ao punçoamento com o aumento da resistência à compressão do betão.



As aproximações das cargas de rotura numérica pela regressão potencial foram obtidas pelas expressões, cuja média das suas potências apresentam um valor de 0.3719, valor consideravelmente superior ao previsto pelo EC2 (1/3) para o mesmo efeito.

#### 5.3.4 Influência da altura útil da laje ( $d$ ) e da percentagem de armadura longitudinal ( $\rho$ ) na carga de rotura ao punçoamento

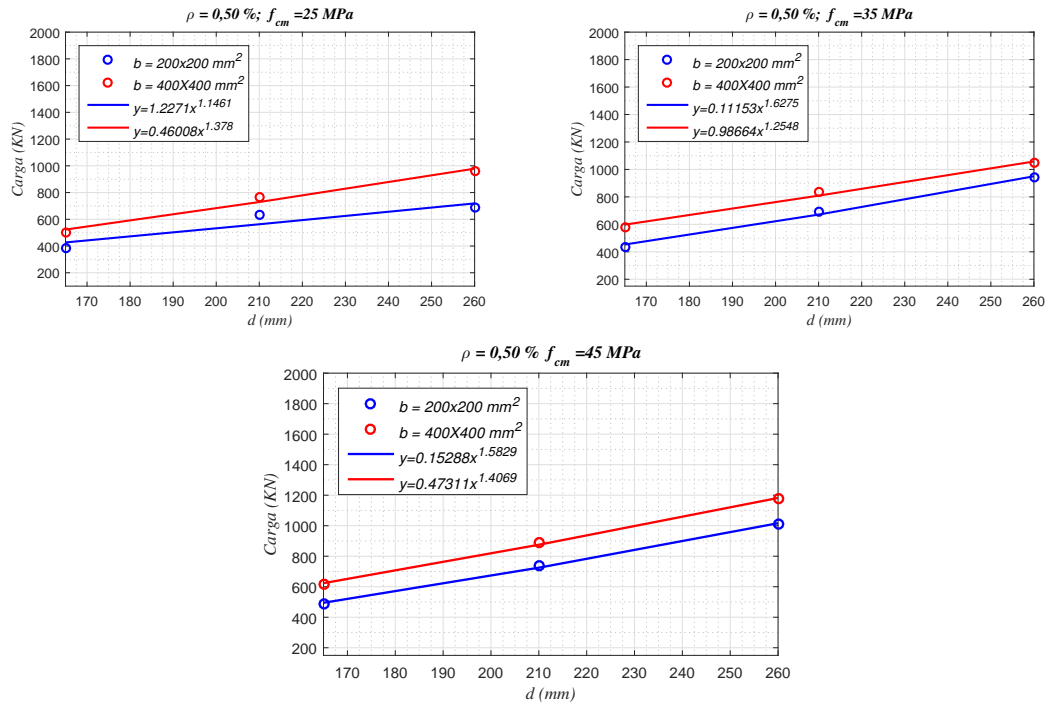
Nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 apresentam as cargas de rotura ao punçoamento dos modelos numéricos, as linhas de tendências obtidas com base na regressão potencial e as respetivas expressões. Os resultados estão associados às dimensões dos pilares distintos.

Os gráficos das Figura 5.9 e 5.10 (análise da influência de  $d$ ) encontram-se agrupados em função da variação da percentagem da armadura. Em cada gráfico destes, é considerado apenas uma classe da resistência do betão à compressão do betão.

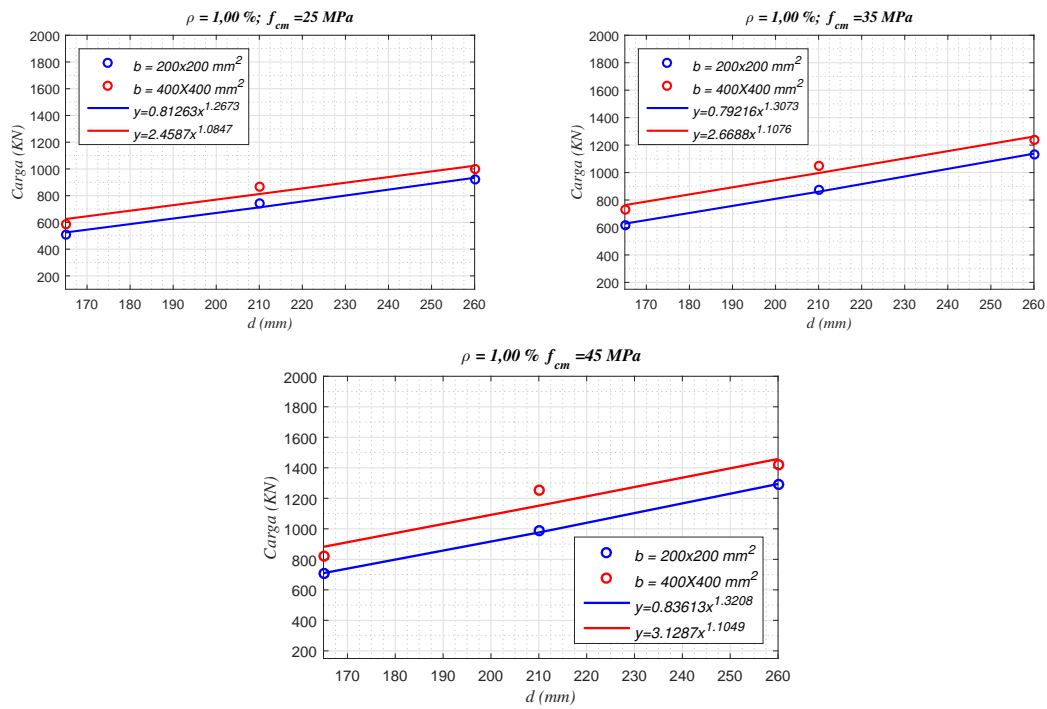
Relativamente à análise da influência da percentagem da armadura  $\rho$ , esta encontra-se nas Figuras 5.11 e 5.12, os gráficos apresentam-se organizados em função da espessura da laje. Em cada conjunto, é considerado apenas um valor da percentagem da armadura longitudinal por gráfico.

## Capítulo 5. Análise Paramétrica

$\Delta d$  com  $\rho = 0.50 \%$



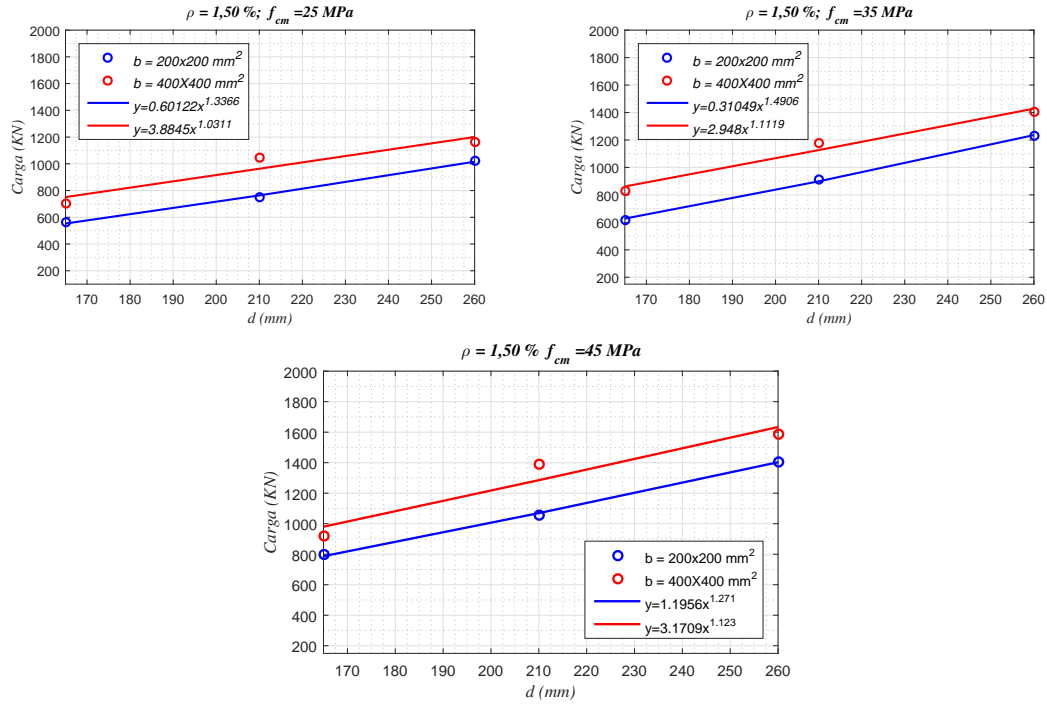
$\Delta d$  com  $\rho = 1.00 \%$



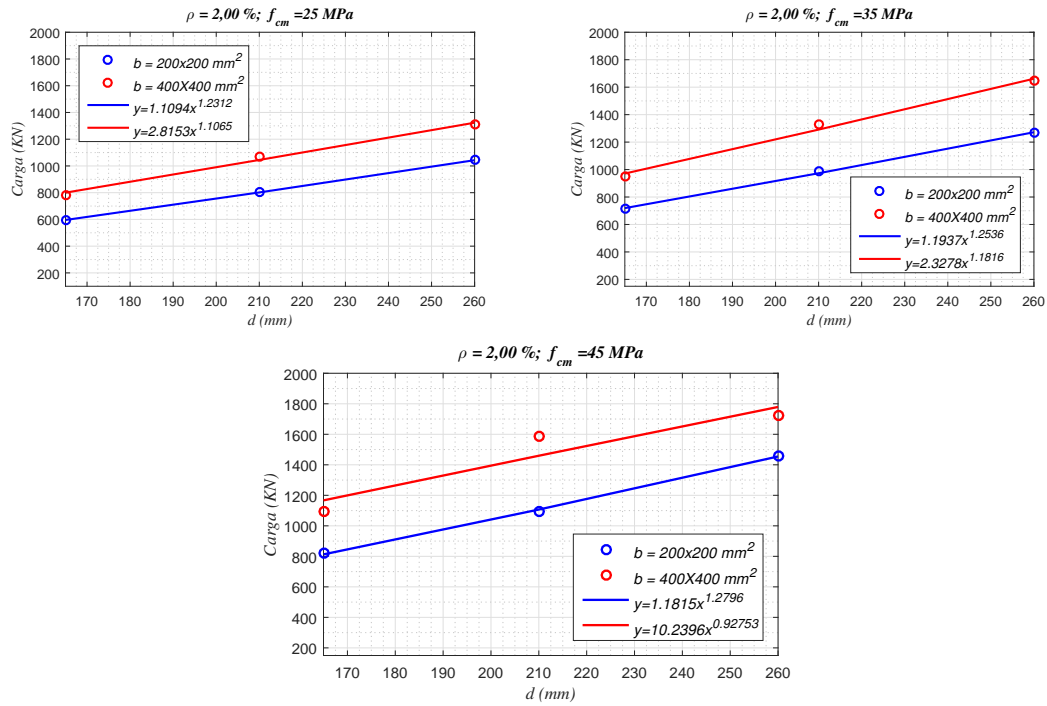
**Figura 5.9:** Evolução das cargas de rotura ao punçoamento em função da altura útil,  $d$ , com  $f_{cm} = [25, 35, 45] \text{ MPa}$  e  $\rho = [0.5, 1.0]\%$ .

### 5.3. Análise dos resultados

$\Delta d$  com  $\rho = 1.50\%$



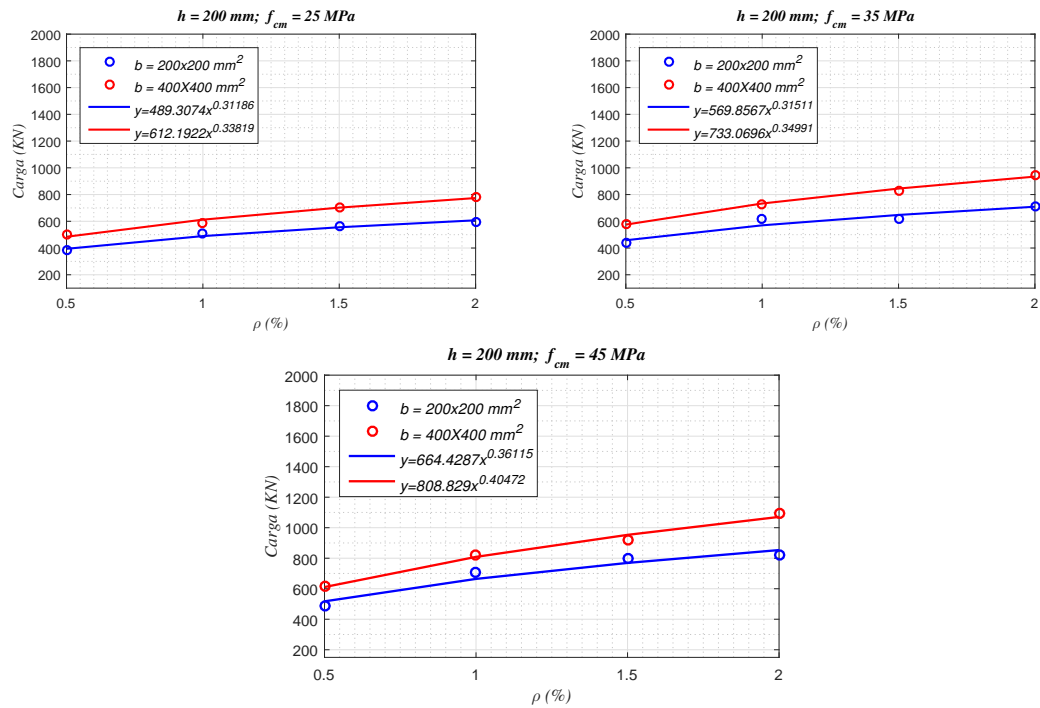
$\Delta d$  com  $\rho = 2.00\%$



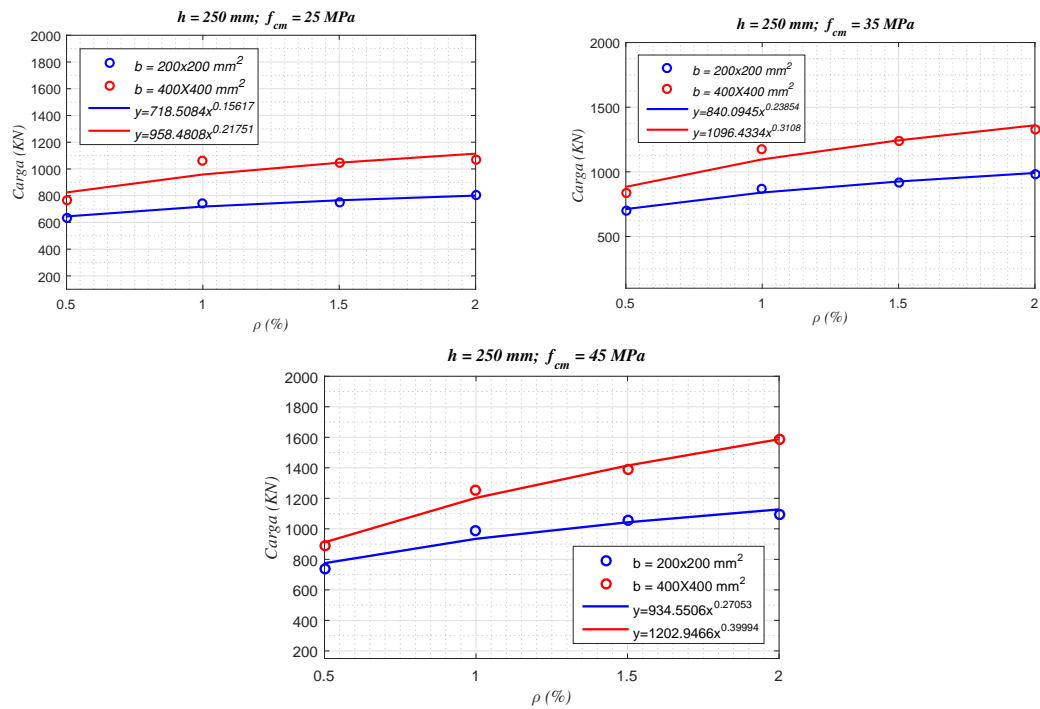
**Figura 5.10:** Evolução das cargas de rotura ao punção em função da altura útil,  $d$ , com  $f_{cm} = [25, 35, 45]\text{ MPa}$  e  $\rho = [1.5, 2.0]\%$ .

## Capítulo 5. Análise Paramétrica

$\Delta\rho$  com  $h = 200$  mm

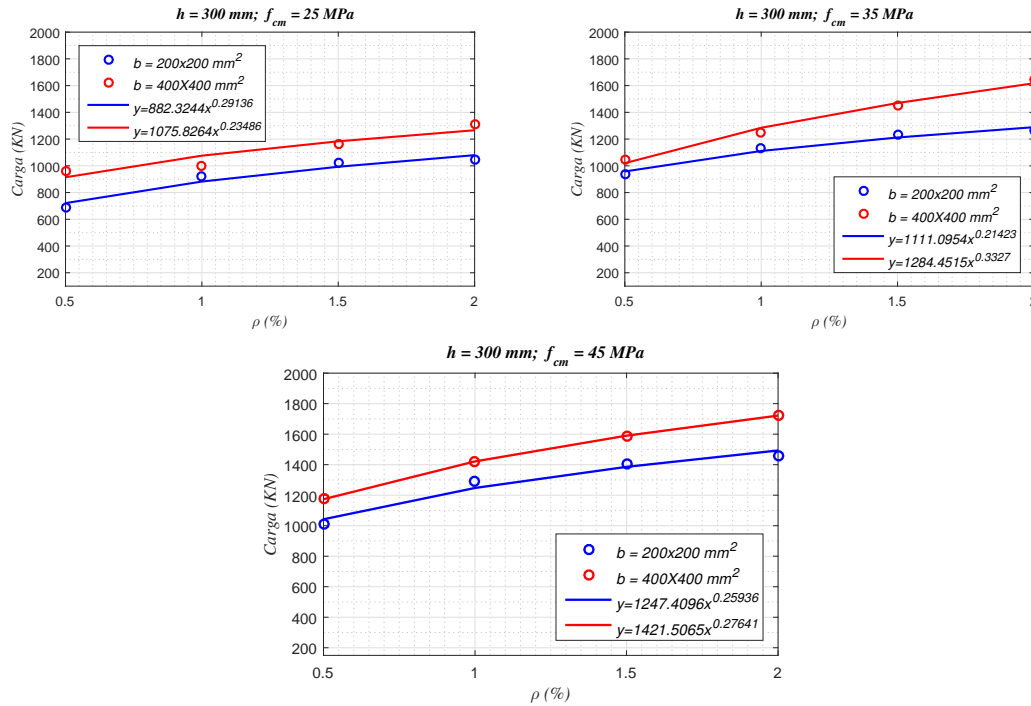


$\Delta\rho$  com  $h = 250$  mm



**Figura 5.11:** Evolução das cargas de rotura ao punção em função da percentagem da armadura,  $\rho$ , com  $h = [200, 250]$  mm e  $f_{cm} = [25, 35, 45]$  MPa.

$\Delta\rho$  com  $h = 300$  mm



**Figura 5.12:** Evolução das cargas de rotura ao punçoamento em função da percentagem da armadura,  $\rho$ , com  $h = 300$  mm e  $f_{cm} = [25, 35, 45]$  MPa.

Após a análise das Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12, observa-se que o aumento da altura útil assim como o aumento da percentagem de armadura proporcionam também um aumento da carga de rotura ao punçoamento. Contudo, o aumento proporcionado não é verificado uniformemente, isto é, não é encontrado uma proporção no acréscimo da carga nos modelos numéricos, nesta análise.

Assim, foi verificada, relativamente à variação da altura útil, que aumento deste parâmetro de 165 mm para 210 mm proporciona tendencialmente maior aumento carga de rotura do que a variação entre 210 e 260 mm. Estas tendências foram observadas mais acentuadamente em modelos de maior secção de pilar ( $b = 400$  mm).

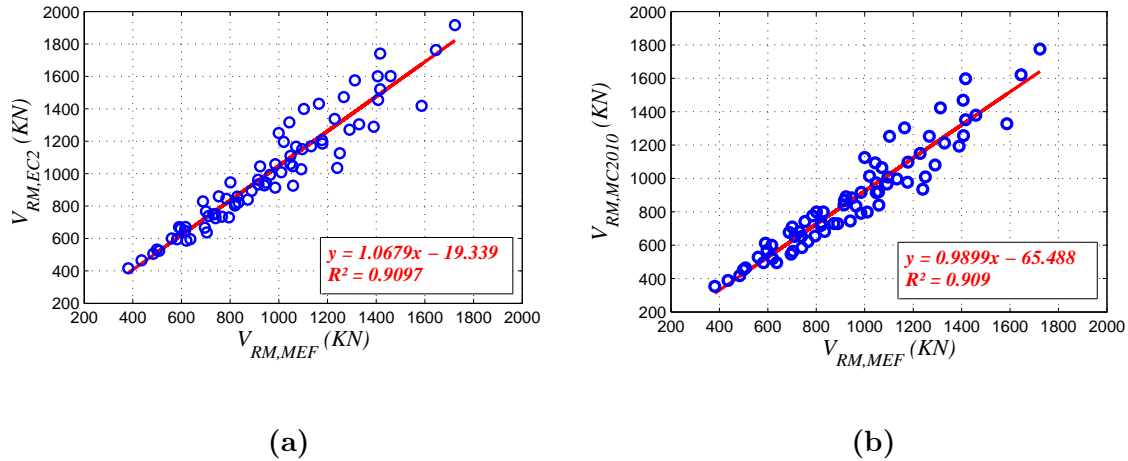
Quanto à avaliação de percentagem de armadura, foram verificados os aumentos das cargas de rotura significativos, ocorridas durante a transição deste parâmetro entre valores 0.50% e 1.00%, e nos modelos com a espessura  $h = 200$  e  $h = 250$  mm.

#### 5.3.5 Comparação dos valores da análise numérica com os valores das normas

Nesta secção procede-se à análise comparativa entre os resultados das cargas de rotura determinadas numericamente com às previstas pelas expressões presentes no EC2 e MC2010. Esta análise é efetuada com recursos a uma aproximação linear (regressão

linear), conforme se ilustra na Figura 5.3.

Retira-se a partir dos gráficos presentes na referida figura, que os resultados numéricos aproximam-se satisfatoriamente às previstas pelas normas. Essas aproximações apresentam valores de: 1.08 (erro de 8%) relativamente ao EC2; e 0.99 (erro de 1%) relativamente ao MC2010. Conclui-se assim, que para esta análise, as aproximações entre os resultados numérico e às previsões de EC2 e o MC2010, observou-se melhores resultados associado ao MC2010.



**Figura 5.13:** Comparação das cargas de rotura da modelação numérica com: (a) EC2 [22] e (b) MC2010.

### 5.3.6 Análise da proposta para alteração da equação do Eurocódigo 2 de resistência ao punçoamento

Algumas expressões para definição das características do betão, neste estudo, diferem das que foram adotadas por Mamede [33], particularmente para a energia de fratura. Contudo, pretende-se realizar a análise da proposta apresentada pelo referido investigador, a fim de averiguar a possibilidade obter uma expressão semelhante (com os resultados de Abaqus). Para tal, adota-se os mesmos procedimentos usados naquele estudo, embora com a diferença de algumas características materiais e o universo de modelos numéricos considerados neste estudo.

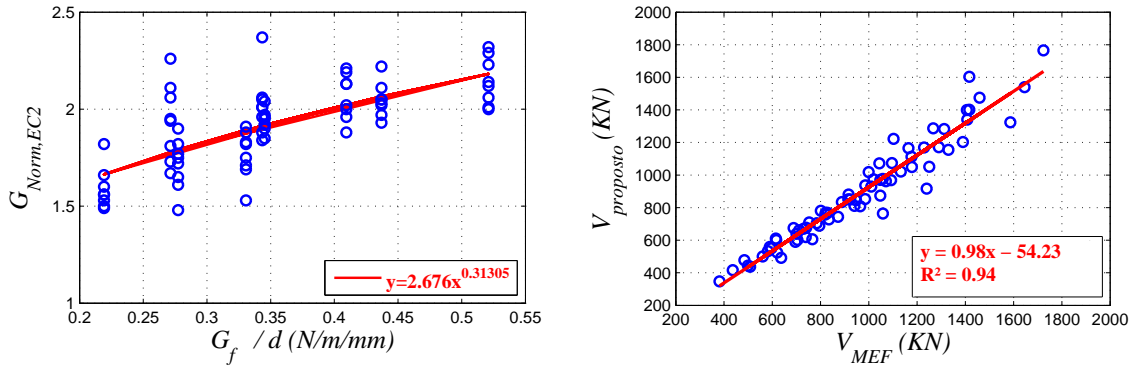
A proposta que se analisa nesta secção foi apresentada em 2011 pelo Mamede [33], como a expressão alternativa à expressão do EC2 [22] (expressão 4.3) para a previsão da resistência ao punçoamento. No seu desenvolvimento, o autor propôs a substituição do fator de escala,  $k$ , definida pela relação  $(1 + \sqrt{\frac{200}{d}})$ , pela energia de fratura, justificando essa intenção com base na influência desta grandeza na simulação do comportamento do betão. Para tal, o investigador procedeu primeiramente à realização da normalização da carga de rotura dos modelos numéricos, com recurso à expressão 5.3.

$$V_{Norm,EC2} = \frac{M_{Rm,MEF}}{0.18 \cdot (100 \cdot \rho_l)^{1/3} \cdot u \cdot d} \quad (5.3)$$

Sabendo que a energia de fratura considerada por Mamede [33], foi definida de acordo com a expressão 5.4,  $G_{f,M}$ , difere da energia de fratura,  $G_f$ , dada de acordo com a expressão MC90 [5], presente na Tabela 4.2.

$$G_{f,M} = 25 \times f_{ctm} \quad [Nm/m^2] \quad (5.4)$$

Ao efetuar uma regressão potencial da relação entre as cargas de rotura normalizadas,  $V_{Norm,EC2}$ , com o rácio da energia de fratura por altura útil,  $\frac{G_f}{d}$ , obtém-se a relação  $2.68 \cdot \left(\frac{G_f}{d}\right)^{0.31}$ , conforme apresentado na Figura 5.14a. Substituindo essa relação na expressão do Eurocódigo 2 [22] (expressão 4.3), obtém-se a expressão 5.5a. Mamede [33] obteve a relação de  $2.41 \cdot \left(\frac{G_f}{d}\right)^{0.15}$ , que deu origem à expressão 5.5b.



(a) Regressão potencial

(b) Regressão linear

**Figura 5.14:** Relação carga de rotura: (a) Normalizada com,  $G_f/d$ ; e (b) Numérica com a da expressão proposta.

$$V_{Rm,Prop,A} = 0.482 \left( \frac{G_f}{d} \right)^{0.31} \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{cm})^{1/3} \cdot u \cdot d \quad (5.5a)$$

$$V_{Rm,Prop,M} = 0.435 \left( \frac{G_{f,M}}{d} \right)^{0.15} \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{cm})^{1/3} \cdot u \cdot d \quad (5.5b)$$

A expressão 5.5a ( $V_{Rm,Prop,A}$ ) corresponde a função obtida através da análise da expressão proposta com base nos resultados de Abaqus. A expressão 5.5b ( $V_{Rm,Prop,M}$ ) é a proposta de Mamede [33], ambas as funções desenvolvidas para o cálculo da resistência ao punçoamento dos modelos de numéricos.

Na Tabela 5.6, apresenta os resultados estatísticos obtidos pela aplicação das expressões 5.5a e 5.5b e os resultados de Mamede [33]. As relações  $V_{Rm,MEF,M}/V_{Rm,EC2,M}$

e  $V_{Rm,MEF,M}/V_{Rm,Prop,M}$  são os resultados numéricos obtidos por Mamede [33] com utilização do programa Atena 3D.

Ao analisar a relação entre as cargas de rotura obtidas pela expressão 5.5a com as dos modelos numéricos, através da regressão linear, Figura 5.14b, verifica-se uma boa aproximação, com erro de 2%, sabendo que foi verificado um erro de 8% em relativamente ao EC2, secção 5.3.5. Em termos médios a expressão 5.5a não apresenta melhor aproximação às cargas rotura obtidas numericamente ( $V_{Rm,MEF}/V_{Rm,Prop,A}$  com erro de 9%) em relação à previsão do EC2 ( $V_{Rm,MEF}/V_{Rm,EC2}$  com erro de 4%), como observado na Tabela 5.6. Para a mesma comparação, Mamede obteve melhor aproximação em relação à equação proposta, onde  $V_{Rm,MEF,M}/V_{Rm,Prop,M}$  apresenta um erro de 1% em comparação com a previsão de EC2 ( $V_{Rm,MEF,M}/V_{Rm,EC2,M}$  (erro de 3%)), conforme apresentado na referida tabela.

A análise entre as médias dos rácios das cargas de rotura numérica e as expressões 5.5a ( $V_{Rm,MEF}/V_{Rm,Prop,A}$ ,  $\mu = 1.09$ , erro de 9%) e 5.5b ( $V_{Rm,MEF,M}/V_{Rm,Prop,M}$ ,  $\mu = 1.01$  erro de 1%), respetivamente, com Abaqus e Atena 3D, demonstra melhor aproximação para resultados de Mamede (Atena 3D).

Ao analisar os resultados de Abaqus, admitindo a expressão 5.5b, e a energia de fratura utilizada por Mamede,  $G_{f,M}$ , obtém-se resultados médios com erros ainda mais significativos (erro de 12%), superior quer em comparação com a relação  $V_{Rm,MEF}/V_{Rm,Prop,A}$  (erro de 9%), como em comparação com a  $V_{Rm,MEF,M}/V_{Rm,Prop,M}$  (erro de 1%).

**Tabela 5.6:** Parâmetros estatísticos do rácio da carga de rotura dos modelos numéricos com os previstos pelo EC2 e formulação proposta por Mamede.

	$\mu$	$\sigma$	COV
$V_{Rm,MEF}/V_{Rm,EC2}$	0.96	0.086	0.090
$V_{Rm,MEF,M}/V_{Rm,EC2,M}$ (Mamede [33])	1.03	0.081	0.078
$V_{Rm,MEF}/V_{Rm,A}$	1.09	0.089	0.081
$V_{Rm,MEF,M}/V_{Rm,Prop,M}$ (Mamede [33])	1.01	0.076	0.076
$V_{Rm,MEF}/V_{Rm,Prop,M}$	1.12	0.095	0.085

### 5.3.7 Verificação das rotações da laje na zona exterior à rotura

A avaliação das rotações da laje,  $\psi_1 d$ , na zona exterior à rotura, é feita com recurso à expressão 5.6. Nesta expressão,  $\delta_{MN}$ , corresponde à leitura dos deslocamentos nos modelos numéricos do ponto monitorizado (no eixo de simetria na zona de momento nulo). O  $l$  é o comprimento dado pela diferença  $0.22 \cdot L - b/2$ , sabendo que  $L = 30 \cdot h$ , secção 5.2, e  $d$  é altura útil média.



$$\psi_1 d = \frac{\psi_{1MN}}{l} \cdot d \quad (5.6)$$

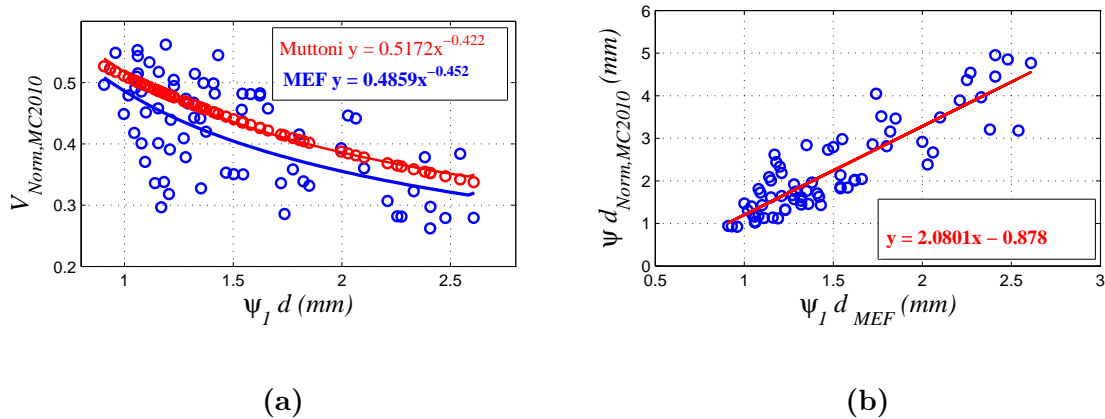
A avaliação da rotação da laje, na zona exterior à rotura por punçoamento, é realizada normalizando as cargas de rotura,  $V_{Norm,MC2010}$ , recorrendo à equação do *Model Code 2010* [12], de acordo com expressão 5.7, representada na Figura 5.15a. Na referida figura, apresenta-se no eixo de abcissa a rotação e no eixo de ordenada a carga normalizada. É projetado no referido gráfico a carga normalizada de Muttoni [36], dada pela expressão 5.8. Nesta expressão os valores de  $\psi_1 d$  utilizados são os que resultaram da análise numérica.

$$V_{Norm,MC2010} = \frac{V_{Rm,MEF}}{d \cdot u_1 \sqrt{f_{cm}}} \quad (5.7)$$

$$V_R = \frac{3/4}{1 + 15 \cdot \frac{\psi_1 d}{16 + d_g}} \quad (5.8)$$

No gráfico da Figura 5.15a apresenta, as linhas de tendência determinadas pela regressão potencial e as correspondentes equações. Ao comparar as duas linhas de tendência, retira-se que há uma boa aproximação entre os valores numéricos com os previstos pelo Muttoni [36]. A rotação da laje obtida com a expressão definida por Muttoni prevê carga de rotura superior em relação aos resultados da análise numérica.

Na Figura 5.15b ilustra-se a linha de tendência dos valores relativos à rotação da laje, na zona exterior à rotura, obtidos na modelação numérica,  $\psi_1 d_{MEF}$ , com os valores previstos para a rotação, segundo *Model Code 2010*,  $\psi_1 d_{MC2010}$ , para o nível de aproximação II, descrita na secção 2.5.2.



**Figura 5.15:** Rotação da laje; (a) Modelos numéricos e a expressão de Muttoni e (b) Linha de tendência linear entre modelos numéricos e a expressão de *Model Code 2010*.

Constata-se que a rotação de *Model Code 2010* apresentam valores superiores do que àqueles obtidos na modelação, conforme evidenciado na Figura 5.15b. A equação que

define a linha de tendência linear, verifica-se que apresenta uma inclinação superior a  $45^\circ$ , onde observa-se que os modelos numéricos evidenciam a rotação subestimada em relação à recomendação *Model Code 2010* em modelos com mesma característica.

### 5.4 Observações gerais

Ao variar crescentemente os diferentes parâmetros (classe de resistência do betão, percentagem de armadura longitudinal, espessura da laje e a dimensão do pilar) considerados na análise paramétrica, os resultados das cargas de rotura obtidas é também crescente.

Foram observados aproximações satisfatórias relativamente às previsões do EC2 [22], embora os resultados obtidos numericamente tivesse apresentado tendência conservativa, justificada pela média dos rácios de  $V_{Rm,MEF}/V_{Rm,EC2}$ . Também foram satisfatórias as aproximações relativas à recomendação de *Model Code 2010* [12], tendo os valores desta previsão a tendência conservativa, o que é verificada pela média obtida da relação  $V_{Rm,MEF}/V_{Rm,MC2010}$ . Refere-se que estas tendências também foram observadas por Mamede [33]

A análise proposta de alteração da equação prevista no Eurocódigo 2 apresentada por Mamede [33], demonstra que a relação obtida pela regressão potencial através carga normalizada,  $V_{Norm,EC2}$  e  $G_f/d$  a ser introduzida em vez de fator de escala (k), pode variar. Todavia, ao analisar a proposta com a relação obtida neste estudo, verifica-se uma boa aproximação dos resultados com os modelos numéricos. De acordo com [33], a importância da energia de fratura na simulação betão e estrutura de betão armado, pode ser considerada na expressão da previsão de rotura por punçoamento.

Relativamente a rotação da laje em torno do pilar na zona exterior à rotura, verificou-se que a previsão da recomendação do *Model Code 2010* apresenta valores superiores em comparação aos modelos numéricos.

# Capítulo 6

## Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 6.1 Principais conclusões

A presente dissertação teve como objetivo principal a realização do estudo numérico do punçoamento em lajes fungiformes com pilar central e de efetuar um estudo paramétrico sobre a influência de diferentes parâmetros no comportamento de lajes fungiformes. A análise não linear foi realizada utilizando o método dos elementos finitos com recurso ao programa comercial Abaqus. Foi utilizada a análise estática implícita e consideradas as não-linearidades material e geométrica. Para modelar o comportamento do betão foi utilizado o modelo de dano com plasticidade (CDP), e para o aço foi admitido o modelo elasto-plástico de modo a permitir uma simulação realista dos modelos. Os resultados da modelação numérica obtidos foram ainda comparados com os obtidos com o programa comercial Atena no âmbito de trabalhos anteriores, [33].

A calibração do modelo constitutivo CDP com base num elevado número de ensaios experimentais confere a garantia e validade dos resultados provenientes da análise paramétrica. No processo de calibração foi verificado o conhecimento e controlo dos parâmetros constitutivos, parâmetro de viscosidade e o ângulo de dilatação. O parâmetro viscosidade,  $\mu$ , utilizado no modelo de comportamento do betão (CDP), facilita o processo de verificação dos critérios da convergência da solução. A atribuição de valor pequeno a este parâmetro retarda a aproximação da superfície de rotura evitando a formação do fenómeno da deformação localizada. Em todos os modelos analisados foi adotado o valor de 0.0015, com exceção das lajes de Guandalini [14], em que houve necessidade de reduzir o valor deste parâmetro. O ângulo de dilatação,  $\psi$ , controla o nível de fragilidade/dutilidade do material. O mesmo foi considerado em todos os modelos com o valor de  $37^\circ$ , com base no estudo de calibração, onde obteve-se resultados satisfatórios.

O estudo paramétrico foi realizado com base em 72 modelos numéricos de laje fungiforme, com diversos valores da espessura à escala real. Conclui-se que através da análise numérica destes modelos foi possível prever o comportamento de estruturas de betão armado como evidenciados nos resultados obtidos, onde foram observados boas

## Capítulo 6. Conclusões e desenvolvimentos futuros

---

aproximações em relação às previsões normativas (EC2 e MC2010). Realça-se que a análise das estruturas com recurso aos modelos numéricos, em particular o método dos elementos finitos é uma alternativa de grande consideração, verificando economia significativa de recursos (tempo, espaço, financiamento e recursos humanos), em relação aos ensaios laboratoriais, apesar da importância destes para calibração.

A variação dos parâmetros no estudo paramétrico conduziu também, à variação das cargas de rotura, onde se verificou o crescimento destas em função de aumento dos valores dos parâmetros analisados.

As cargas de rotura obtidas numericamente foram de boa aproximação relativamente à expressão de previsão da resistência ao punçoamento, sem armadura específica do EC2. Essa aproximação resultou em valor médio de 0.96 e um coeficiente de variação de 0.090. Ao comparar estes resultados de Abaqus com os de Mamede com programa Atena 3D, verifica-se que o investigador obteve também boa aproximação em relação EC2, com valor médio de 1.03 e um coeficiente de variação de 0.078, o que traduz num erro médio de 4% e 3% com Abaqus e Atena 3D respetivamente. Os resultados previstos pelos modelos no programa Abaqus são tendencialmente conservativos em relação ao EC2, e o contrário em relação ao programa Atena 3D.

As cargas de rotura determinadas de acordo com as recomendações presentes no MC2010 são na sua maioria conservativas em relação as respetivas previsões numéricas ou de EC2. Da análise estatística dos rácios entre as cargas obtidas numericamente e por esta recomendação obteve-se valor médio de 1.10, e coeficiente de variação de 0.107. Com o programa Atena 3D (Mamede) obteve-se a média de 1.14 e coeficiente de variação de 0.079. Estes resultados também revelam a tendência conservativa da recomendação do MC2010 em relação aos numéricos. Ao comparar os dois estudos, conclui-se que este apresenta melhor aproximação média à esta recomendação do que o de Mamede.

Relativamente às rotações das lajes, foram previstos valores inferiores tanto neste trabalho como no de Mamede em relação às recomendações de Muttoni [36] e do MC2010 [12], o que confirma uma vez mais a tendência conservativa.

Com base nos resultados obtidos, a utilização do modelo CDP para o betão, através do programa comercial Abaqus, mostrou-se apropriada para a simulação do punçoamento em lajes fungiformes.

A análise da proposta apresentada por Mamede, para a alteração da equação que prevê a carga de rotura ao punçoamento no Eurocódigo 2, resultou numa relação da energia de fratura e altura útil com constantes diferentes. Contudo, ao substituir esta relação no lugar de fator de escala na expressão do EC2, obteve-se cargas de rotura mais próximos aos de modelos numéricos, em relação à aproximação que se obteve da carga numérica e a expressão original de EC2. Os valores da média dos rácios obtidos por Mamede com expressão proposta foi de 1.01 com coeficiente de variância de 0.076, de melhor aproximação em relação ao que se obteve neste estudo, cujo valor foi de 1.03

com coeficiente de variância de 0.081.

## 6.2 Desenvolvimentos futuros

A realização desta dissertação de mestrado teve como objetivo contribuir significativamente para entendimento de fenômeno de punçoamento, particularmente através de modelos numéricos. Assim, apresentam-se possíveis desenvolvimentos futuros visando complementar e aprimorar pesquisas neste sentido:

- ★ Estudo paramétrico ao punçoamento em pilares de centro com recurso ao programa Abaqus, em modelo comportamento CDP, pelo *Step - Riks* ou *Explicit*, de modo a averiguar a influência excentricidade causada pela diferença da altura útil das armaduras nas duas direções ortogonais;
- ★ Estudo paramétrico para análise da proposta apresentada por Mamede, para alteração de equação de previsão da resistência ao punçoamento no EC2.



# Bibliografia

- [1] Afonso, C. L. M., 2010. *Lajes fungiformes. Construção para a compreensão do seu comportamento*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia, Universidade de Porto.
- [2] Almansa F, Alfarah B., Oller S., 2014 *Numerical Simultion of RC Frame Testing with Damaged Plasticity Model. Comparison with Simplified Models*. SECEES, Istambul, 25-29
- [3] Barros, J.A.O., 1996. *Modelos de fendilhação para o betão*. Relatório Técnico, Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Minho, ISISE - Relatórios Técnicos/Científicos, 47 p
- [4] Birtel V, Mark P., 2006. *Parametrised Finite Element Modelling of RC Beam Shear Failure*. Abaqus Conference.
- [5] CEB-FIP; Fédération Internationale du Béton, 1993. *Model Code 1990 - Design Code*. Lausanne.
- [6] Červenka, V.; Jendele, L.; Červenka, J., 2010. *textitATENA Program Documentation Part 1 - Theory*. Cervenka Consulting Ltd, Praga, 2010.
- [7] Dooley, S., 2004. *The development of material-adapted structural form*. Tese de Doutoramento, Lausanne, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [8] Duarte, I. O., 2008. *Comportamento ao Punçoamento de Lajes Fungiformes Reforçadas com Parafusos*. Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- [9] El-Salakawy, E.; Soudki, K.; Polak, M. A., 2004. *Punching Shear Behaviour of Flat Slabs Strengthened with Fiber Reinforced Polymer Laminates*. Journal of Composites for Construction, Vol. 8, No. 5, 384-392.
- [10] Faria D, N. , 2010. *Reforço de Lajes do betão Armado usando Pós-Tensão com Ancoragens por Aderência*. Tese de Doutoramento, Faculdade Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [11] Faria D., Lúcio V, Ramos A., 2011. *Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding*. Eng Struct 2011;33(June):2025-43.
- [12] Fédération Internationale du Béton, 2010. *Model Code 2010, First Complete Draft*. Bulletin 56, Volume 2. Lausanne.
- [13] Gardner, N.J., Huh, J., Chung, L., 2002. *Lessons from Sampoong Department store collapse*. Cement and Concrete Composites, n.º24, págs. 523-529, 2002.
- [14] Guandalini, S., 2006. *Poinçonnement Symétrique des dalles en Béton Armé*, Tese de Doutoramento, École Polytechnique de Lausanne, Suíça.
- [15] Guidotti, R., 2010. *Poinçonnement des Planchers dalles avec collones superposées fortement sollicitées*, Tese de Doutoramento, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suíça.
- [16] Harajli, M. H.; Soudki, K.; Kudsi, T., 2006. *Strengthening of Interior Slab-Column Connections Using a Combination of FRP sheets and Steel Bolts*. Journal of Composites for Construction, Vol. 10, No 5, 399-409.
- [17] Hibbit, Karlsson, Sorensen, 2004. *ABAQUS/Standard User's Manual*. Pawtucket, 6th Edition.
- [18] Hibbitt, Karlsson, Sorensen, 2006. *ABAQUS/Standard User's Manual*. Pawtucket, 6th Edition.
- [19] Hordijk, D., 1992. *Tensile and tensile fatigue behavior of concrete; experiments, modeling and analyses*. Heron 37(1):3-79.
- [20] Hu, H. and Schnobrich, W., 1989. *Constitutive Modeling of Concrete by Using Nonassociated Plasticity*. J. Mater. Civ. Eng., 1(4), 199-216
- [21] Inácio, R., 2010. *Análise Numérica do Punçoamento em Lajes Funçiformes*. Tese de Mestrado, Faculdade Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica.
- [22] Instituto Português da Qualidade, 2010. *NP EN 1992-1-1 Eurocódigo 2: Projeto de Estruturas do betão- Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*
- [23] Jankowiak, T., Lodygowski, T., 2005. *Identification of Parameters of Concrete Damage Plasticity Constitutive Model*. Poznan University of Technology, Institute of Structural Engineering (ISE)ul.Piotrowo, Poznan - Polónia, 5, 60-975.
- [24] Jirasek, M., Bazant, Z.P., 2002 *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley and Sons, Chichester.



- [25] Krätzig, WB, Pölling R., 2004. *An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters*. Computer and Structures 82(15-16): 1201-1215.
- [26] Kupfer, H., Gerstle, K., 1969. *Behavior of concrete under biaxial stresses*. ASCE Journal of Engineering Mechanics Division Vol. 99, No. 4, 853-866.
- [27] Lee J, Fenves G., 1998. *Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures*. Journal of engineering mechanics, ASCE Vol. 124, No. 8, 892–900.
- [28] Li, K., 2000. *Influence of size on Punching Shear Strength of Concrete Slabs*, Tese de Mestrado, McGill University, Montreal, Canada.
- [29] Lopes, J. M. F., 2008. *Estudo de pavimentos constituídos por lajes fungiformes pré-esforçadas*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia, Universidade de Porto.
- [30] Lubliner J, Oliver J, Oller S, Oñate E., 1989. *A plastic-damage model for concrete*. International Journal of solids and structures Vol. 25, No. 3, 299–326.
- [31] Luís, M. S., 2010. *Punçoamento cíclico de lajes fungiformes reforçadas com pré-esforço transversal*. Tese de Mestrado, Faculdade Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica.
- [32] Malm, R., 2006. *Shear cracks in concrete structures subjected to in-plane stresses*. Tese de Doutoramento, TRITA-BKN. Bulletin 88, 1103-4270.
- [33] Mamede, N. F. S., 2010. *Estudo Paramétrico do Punçoamento em Lajes Fungiformes através de Análise Numérica*. Tese de Mestrado, Faculdade Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica.
- [34] Mamede, N., Ramos, A. e Faria, D., 2012. *Análise do efeito de características mecânicas e geométricas que afetam o comportamento ao Punçoamento de lajes fungiformes*. Encontro Nacional Betão Estrutural 2012, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [35] Mamede, N., Ramos, A., Faria, Duarte, 2012. *Experimental and parametric 3D nonlinear finite element analysis on punching of flat slabs with orthogonal reinforcement*. Journal Engineering Structures, Vol. 48, p.442-457.
- [36] Muttoni, A., 2008. *Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement*. ACI Structural Journal Vol. 105, No. 4: 440-450.
- [37] Nogueira, J. P. M., 2011. *Modelação numérica do punçoamento de lajes fungiformes reforçadas com parafusos*. Tese de Mestrado, Faculdade Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [38] Ramos, A. M. P., 2003. *Punçoamento em Lajes Fungiformes Pré-Esforçadas*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- [39] Ramos, A. M. P., Lúcio V. J. G., 2011. *Estruturas do betão Armado II*. Faculdade Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica.
- [40] Staller, M., 2000. *Analytical Studies and Numerical Analyses of Punching Shear Failure in Reinforced Concrete Slabs*. International Workshop on Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs, Estocolmo.
- [41] Talbot, A. N. e W. A. Slater, 1913. *Tests of reinforced concrete buildings under load*. Engineering Experiment Station Bulletin 64.
- [42] Tomaszewick, A., 1993. High-Strength Concrete SP2-Plates and Shells , Report 2.3. *Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs*, Norway.
- [43] Van Mier, J. G. M., 1984. *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*. PhD Thesis, Techn. Univ. Eindhoven.
- [44] Vonk, R., 1992. *Softening of Concrete loaded in Compression*. PhD Thesis, Eindhoven University of Technology, Netherlands.
- [45] Wahalathantri, B.L., Thambiratnam, D.P., Chan, T.H.T., Fawzia, S., 2011. *A material model for flexural crack simulation in reinforced concrete elements using ABAQUS*. First International Conference on Engineering, Designing and Developing the Built Environment for Sustainable Wellbeing, Queensland University of Technology, Queensland University of Technology, Brisbane, Qld, pp. 260-264.
- [46] Winkler, K., Stangenberg, F., 2006.. *Numerical Analysis of Punching Shear Failure of Reinforced Concrete Slabs*. Abaqus Conference.